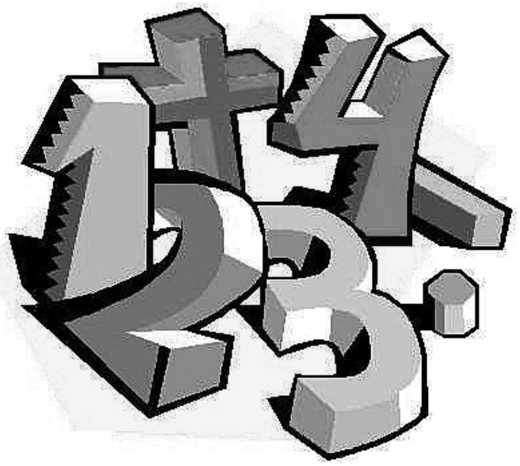
بسم الله الرحمن الرحیم

چاپ دوم



مکمل حسابان

از سری کتاب‌های مکمل ریاضی

استادان مؤلف: آل یاسین، ابراهیمی ، اشرفی، بیات ، جعفری ، خادمی ، رفیعی ، سپهری ، نصر ، هاشملی و یاوری

هماهنگی و نظارت علمی: استاد اشرفی

تلفن: ۸۸۵۱۲۵۲۵

www.MSBook.ir

آدرس: تهران - ابتدای خیابان شهید دکتربهشتی- پلاک۹

عنوان و نام پدیدآور	**: مکمل حسابان / استادان مولف آل‌یاسین ... [و دیگران] ؛ هماهنگی و نظارت علمی اشرفی ؛ ویرایشگر علمی آهنگر.**
مشخصات نشر	**: تهران: فکور، ۱۳۸۹.**
مشخصات ظاهری	**: ۲۲۴ ص.: مصور.**
فروست	**: ... سری کتاب‌های مکمل ریاضی.** **مجموعه کتاب‌های تخصصی ریاضیات دبیرستان.**
شابک	: 978-964-8831-48-1
وضعیت فهرست‌نویسی	**: فیپا**
موضوع	**: حسابان-- راهنمای آموزشی (متوسطه)**
موضوع	**: حسابان-- مسائل، تمرین‌ها و غیره (متوسط)**
شناسه افزوده	**: آل‌یاسین، حامد، ۱۳۴۵-**
شناسه افزوده	**: اشرفی، عباس، ۱۳۵۶-**
شناسه افزوده	**: آهنگر، عطاالله، ویراستار**
رده‌بندی کنگره	**: QA۳۰۳/۳/ ۶۷م ۱۳۸۹**
رده‌بندی دیویی	**: ۵۱۵/۰۷۶**
شمار کتاشناسی ملّی	**: ۲۱۰۲۳۶۳**

نام کتاب: .... **مکمل حسابان**

مؤلفین: .... **آل یاسین ، ابراهیمی ، اشرفی ،**

بیات ، جعفری ، خادمی ، رفیعی ، سپهری ، نصر ، هاشملی و یاوری

ناشر: .... **انتشارات فکور**

نوبت چاپ: .... **دوم - ۱۳۹۰**

شمارگان: .... **۲۵۰۰ جلد**

قیمت: .... **۷۵۰۰ تومان**

شابک: **۱- ۴۸- ۸۸۳۱- ۹۶۴- ۹۷۸**

سخنی با استادان محترم ریاضی:

کتاب مکمل حسابان از مجموعه کتاب‌های مکمل ریاضی می‌باشد.

این مجموعه کتاب‌ها به‌طور اختصاصی مربوط به گسترش و آموزش درس ریاضی می‌باشند و تاکنون پنج جلد از آن برای دوره‌ی دبیرستان منتشر شده است.

در این کتاب سعی‌کرده‌ایم از تغییر کتاب درسی با رویکرد آموزش کاربردی و هندسی مفاهیم ریاضی پیروی کنیم و با طرح مطالب از طریق شکل، مفاهیم را بسط و گسترش دهیم. در مجموع ویژگی‌های کتاب عبارتند از:

۱) در این کتاب مسائل، نسبتاً دشوار طراحی شده است.

۲) در این کتاب تقریباً $\frac{1}{3}$ سوال‌های کتاب حل‌نشده باقی مانده‌اند (که با ستاره مشخص شده‌اند) تا به عنوان تکلیف برای دانش‌آموزان تعیین شود.

۳) در این کتاب ریتم چیدمان سوالات حتی‌المقدور مشابه سوالات کتاب درسی می‌باشد.

۴) در این کتاب در هر فصل، سوالات امتحان نهایی مرتبط با کتاب جدید از سال ۸۶ به بعد در کتاب آورده شده است.

۵) در این کتاب گرایش کلی حل سوالات تشریحی است ولی هر جا نیاز بوده است نکته‌ی تستی مسأله نیز قید شده است.

۶) در این کتاب مطالب اضافی مربوط به کتاب قبل کاملاً حذف شده است.

دبیــر گرامی:

سعی ما بر این است تا تألیف کتاب‌هایمان گروهی باشد. بنابراین اگر قصد همکاری دارید یا می‌توانید کتاب‌های تألیف شده را ویراستاری علمی نمایید، مهم نیست در کجای ایران هستید، با ما تماس بگیرید.

به نام خدا

مقدمه‌ای برای چاپ دوم مکمل حسابان

همان‌طور که می‌دانید در سال تحصیلی گذشته کتاب درسی حسابان تغییر کرد و این تغییر بر اساس نظر اکثریت قریب به اتفاق مدرسان مثبت ارزیابی گردید.

سال عجیبی بود. بعضی از استادان آنقدر روی فصل‌های اول و دوم وقت گذاشته بودند که به حد و مشتق نرسیدند. روش تدریس تابع تغییر کرده بود. مفاهیم حد تغییرات اساسی کرده بود و کاربرد مشتق حذف شده بود که باعث ایجاد مشکلات بسیاری در تدریس استادان و کتاب‌های کمک آموزشی شد.

سال گذشته هیچ امتحان نهایی برگزار نشده بود تا شیوه‌ی طرح سوالات معلوم باشد.

ما هم با توسل به تجربه‌ی استادان گرانقدرمان و تکیه به شعار ((خود راه بگویدت که چون باید رفت)) شروع به تألیف گروهی کتاب مکمل حسابان نمودیم.

دو کار ارزشمند ما پس از چاپ کتاب یکی قرار دادن فایل کل کتاب برای دانلود رایگان روی سایت و دیگری اهداء کتاب به اکثر دبیران حسابان در سراسر کشور، باعث شد تا کتاب مکمل شناخته شود و بسیاری از استادان این کتاب را به دانش‌آموزان خود معرفی کنند. فقط در سایت خودمان (www.msbook.ir) بیش از ۵۰/۰۰۰ بار این کتاب دانلود شد.

خیلی جالب بود که پس از برگزاری امتحان نهایی، مشابه تمام سوالات در کتاب مکمل حسابان وجود داشت.

امسال که قصد تجدید چاپ این کتاب را داشتیم، با مراجعه به استادانی که یکسال تمام هم با کتاب درسی و هم با کتاب مکمل سر و کله زده بودند، از آن ها خواستیم تا کتاب را یک بار ویرایش اساسی نمایند. سوالاتی را که لازم می‌دانند اضافه کنند و سوالاتی که بهره‌ی آموزشی کمی دارند را حذف نمایند.

با توجه به تجربه‌ی سال گذشته و حک و اصلاح استادان، کتاب به بهترین حالت ممکن درآمد.

در انتهای کتاب سوالات امتحان نهایی برگزار شده در داخل و خارج از کشور را قرار دادیم تا دانش‌آموزان با مراجعه به آن بتوانند خود را محک بزنند.

در پایان از همه‌ی استادانی که ما را در تألیف، ویراستاری و توزیع کتاب یاری نمودند، صمیمانه سپاسگذاریم و امیدواریم با ذکر نام آن‌ها در انتهای کتاب قدمی هرچند کوچک در ابراز ارادتمان نسبت به آن‌ها برداشته باشیم.

عباس اشرفی
مجموعه کتاب‌های مکمل ریاضی

فهرست

فصل اول

■ مجموع دنباله‌ها و محاسبات جبری و معادلات و نامعادلات

سوالات فصل اول ۶

پاسخ سوالات فصل اول ۲۵

فصل دوم

■ تابـع

سوالات فصل دوم ۵۴

پاسخ سوالات فصل دوم ۷۶

فصل سوم

■ مثلثات

سوالات فصل سوم ۱۰۶

پاسخ سوالات فصل سوم ۱۱۹

فصل چهارم

■ حـد توابع و پیوستگی

سوالات فصل چهارم ۱۴۰

پاسخ سوالات فصل چهارم ۱۵۹

فصل پنجم

■ مشتق توابع

سوالات فصل پنجم ۱۸۴

پاسخ سوالات فصل پنجم ۱۹۵

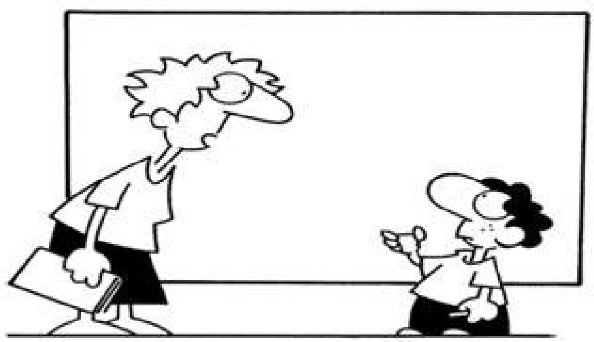
سوالات امتحان هماهنگ ۲۱۲

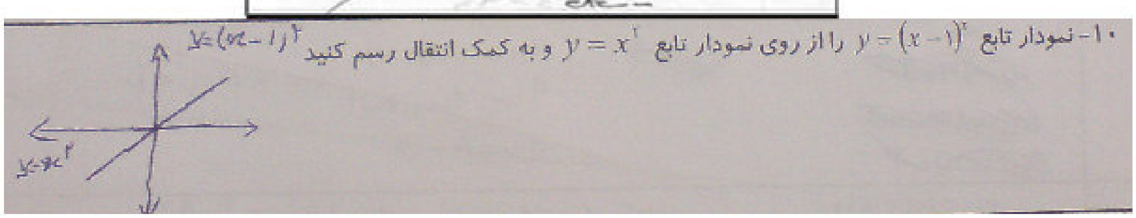
فصل اول

محاسبات جبری و معادلات و نامعادلات

نویسندگان و ویرستاران:استادان آل یاسین،ابراهیمی و جعفری

اشتباه خنده دار یک دانش آموز در ریاضی




۱۰- نمودار تابع $y=(x-1)^2$ را از روی نمودار تابع $y=x^2$ و به کمک انتقال رسم کنید

$y=(x-1)^2$

$y=x^2$

فصل اول

مجموع دنباله‌ها و محاسبات جبری و معادلات و نامعادلات

* ۱- در یک دنباله‌ی حسابی جمله‌ی اول $a+۲b$ و قدر نسبت $a-b$ است. پنج جمله‌ی اول دنباله را مشخص کنید. مجموع پنج جمله‌ی اول را بنویسید.

۲- اولاً : به ازای چه مقدار x سه جمله‌ی $x+۲$ ، $۲x+۷$ و $۷-۲x$ دنباله‌ی حسابی تشکیل می‌دهند؟
ثانیاً : مجموع ده جمله‌ی اول دنباله‌ی فوق را بیابید.

* ۳- مجموع عددهای واقع در جدول ضرب ۱۰×۱۰ را حساب کنید.

۴- مجموع ۱۱ عدد از مضرب‌های نخست غیرصفر و مثبت کدام عدد برابر ۴۶۲ است؟

* ۵- در دنباله‌ی حسابی با جمله‌ی اول ۲۱ و قدر نسبت ۹، مجموع چند جمله را انتخاب کنیم که از ۱۰۰۰۰ کوچک‌تر نباشد.

۶- در یک دنباله‌ی عددی مجموع بیست جمله‌ی اول ، سه برابر مجموع دوازده جمله‌ی اول است. اگر جمله‌ی سوم برابر ۶ باشد. جمله‌ی دهم را بیابید. (کنکور ریاضی – ۹۰)

* ۷- یک ساعت دیواری در رأس هر ساعت به تعداد عدد ساعت زنگ می‌زند. در ضمن این ساعت روی (۱۵ دقیقه) یک زنگ، روی (۳۰ دقیقه) دو زنگ و روی (۴۵ دقیقه) سه زنگ می‌زند. این ساعت در شبانه‌روز چند بار زنگ می‌زند؟

* ۸- در یک دنباله‌ی حسابی جملات پنجم و دهم به ترتیب ۳۲ و ۱۲ می‌باشند.
اولاً: جمله‌ی هفتم برابر چیست؟
ثانیاً : مجموع هفت جمله‌ی اول برابر چیست؟

* ۹- در زندگی واقعی خود یک مساله بنویسید که دنباله‌ی حسابی را بیان کند.

۱۰- در یک دنباله‌ی عددی با جمله‌ی اول a اگر به قدر نسبت آن یک واحد افزوده شود، آن‌گاه به مجموع بیست جمله‌ی اول آن چقدر افزوده می‌شود؟

* ۱۱- در دنباله‌ی حسابی ...,۵,۳,۱ حداقل چند جمله را باید جمع کنیم تا حاصل از ۲۰۰ بزرگ‌تر شود؟

۱۲- حداقل چند عدد زوج را باید جمع بزنیم که مجموع از ۵۰۰ بیش‌تر شود؟

۱۳- در یک دنباله‌ی حسابی با ضابطه‌ی $a_n=۴n+۱$ ، جمله‌ی عمومی S_n چه می‌باشد؟

۱۴- در یک دنباله‌ی حسابی ضابطه‌ی مجموع n جمله‌ی اول $S_n = ۲n^۲ + n$ می‌باشد. ضابطه‌ی a_n چه می‌باشد؟

*۱۵- کارمندی به ازای هر ماه کار یک روز و نیم مرخصی کسب می‌کند. اگر این کارمند در ابتدای سال ۱۱ روز مرخصی ذخیره داشته باشد و در طی سال آینده هیچ مرخصی را استفاده نکند، در پایان سال این شخص روی‌هم چند روز مرخصی ذخیره خواهد کرد؟

*۱۶- در یک دنباله‌ی حسابی $S_۵ = ۲۰$ و $S_{۲۰} = ۲۰۰$ است. $S_{۳۰}$ را بیابید.

۱۷- فردی A ریال در بانک پول دارد. اگر ماه اول $x_۱ = \frac{۱}{۲۸}A$ و در ماه دوم $x_۲ = x_۱ + \frac{۱}{۲۸}A$ و در ماه سوم $x_۳ = x_۲ + \frac{۱}{۲۸}A$ از حساب خود برداشت نماید، پس از چند ماه پس‌انداز وی تمام می‌شود؟

*۱۸- در یک دنباله‌ی عددی جمله‌ی n اُم به صورت $a_n = \frac{۳}{۲}n - ۵$ است. مجموع ۱۵ جمله‌ی اول این دنباله کدام است؟ (سراسری – ۸۹)

* ۱۹- اگر مجموع جملات شماره‌ی زوج یک دنباله‌ی عددی ده جمله‌ای ۳۰ و مجموع جملات شماره‌ی فرد آن ۲۰ باشد، قدر نسبت را بیابید.

*۲۰- محاسبه کنید.

الف) $\dfrac{۱-۲^۷}{۱-۲} =$

ب) $\dfrac{۱-(\frac{۱}{۲})^۶}{۱-\frac{۱}{۲}} =$

پ) $\dfrac{۱-(-\frac{۱}{۳})^۵}{۱-(-\frac{۱}{۳})} =$

۲۱- در دنباله‌ی هندسی با شرایط $a_۱ = ۳$ و $a_۴ = ۲۴$ مجموع ۵ جمله‌ی اول برابر چیست؟

۲۲- جمله‌ی عمومی یک تصادعد هندسی $a_n = ۲^{n+۱}$ می‌باشد. مجموع چند جمله از دنباله‌ی هندسی برابر ۱۲۴ می‌باشد؟

۲۳- در شهری ۸۱۹۱ نفری، می‌خواهیم یک شایعه را پخش کنیم. اگر هر فرد این شایعه را به دو نفر دیگر بگوید و هر کدام از آن‌ها نیز به دو نفر دیگر و ... و مدت زمانی که هر مرحله اتفاق می‌افتد، $\frac{۱}{۲}$ ساعت باشد، چند ساعت طول می‌کشد تا این شایعه را همه‌ی شهر بشنوند؟

*۲۴- در زندگی روزمره‌ی خود یک مساله بنویسید که دنباله‌ی هندسی را بیان کند.

* ۲۵- در یک دنباله‌ی هندسی مجموع سه جمله‌ی متوالی ۱۹ و حاصل‌ضرب آن‌ها ۲۱۶ است. تفاضل کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین این سه عدد را بنویسید. (سراسری تجربی - ۹۰)

۲۶- کارمندی سالانه ۴/۰۰۰/۰۰۰ تومان حقوق دریافت می‌کند. اگر هر سال ۱۰% به حقوق او افزوده شود.
الف) میزان حقوق سالیانه این کارمند در سال سی‌ام چه‌قدر است؟
ب) مجموع حقوق دریافتی او در طی این سی سال چه‌قدر است؟

۲۷- حاصل $(۱+x+x^۲+...+x^۸)(۱-x+x^۲-x^۳+...+x^۸)$. به ازاء $x=\sqrt{۲}$ برابر چیست؟

۲۸- در یک دنباله‌ی هندسی، مجموع سه جمله‌ی اول ۱۳۶ و مجموع شش جمله‌ی اول آن ۱۵۳ می‌باشد. جمله‌ی اول چند برابر جمله‌ی پنجم است؟ (سراسری - ۸۹)

* ۲۹- مجموع شش جمله‌ی اول دنباله‌ی هندسی $۲, x, \frac{۱}{۲}, ...$ را در دو حالت محاسبه کنید.

۳۰- در دنباله‌ی هندسی غیرنزولی که جملات اول و سوم به ترتیب ۳ و $\frac{۳}{۴}$ می‌باشد، حد مجموع برابر چیست؟

* ۳۱- در یک دنباله‌ی هندسی مجموع ۵ جمله‌ی اول برابر مجموع بقیه‌ی جملات است. قدر نسبت را بیابید.

۳۲- حد مجموع جملات یک دنباله‌ی هندسی برابر ۴ و حد مجموع مربعات جملات همان دنباله برابر یک است. قدر نسبت برابر چیست؟

* ۳۳- مجموع همه‌ی جملات $۱+\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۴}-\frac{۱}{۹}...$ را بیابید.

* ۳۴- جمع همه‌ی جملات $a_n=\frac{۱^n+۲^n+۳^n}{۶^n}$ را بیابید.

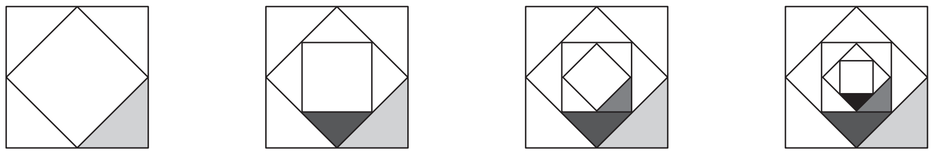
۳۵- توپی را از فاصله‌ی ۲ متری زمین به صورت قائم رها می‌کنیم. به طوری که هر بار پس از برخورد به زمین، هشتاد درصد ارتفاع اولیه بالا می‌آید. این توپ چه مسافتی را طی می‌کند تا بایستد؟

* ۳۶- توپی را از ارتفاع ۲۰ متری به زمین رها می‌کنیم. این توپ هر بار پس از برخورد با زمین به اندازه‌ی $\frac{۴}{۵}$ ارتفاع خود بالا می‌آید. این توپ پس از طی چه مسافتی می‌ایستد؟

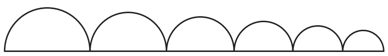
۳۷- مثلثی متساوی‌الاضلاع به ضلع a مفروض است. اوساط اضلاع آن را به هم وصل می‌کنیم. و این عمل تکراری را بی‌شمار مرتبه انجام می‌دهیم. حد مجموع مساحت‌های مثلث‌های پدیدآمده برابر چیست؟

۳۸- محیط یک دایره به شعاع واحد را به ۶ قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم و با نقاط به دست آمده یک ۶ ضلعی منتظم می‌سازیم و سپس وسط‌های این ۶ ضلعی را به هم وصل کرده و یک ۶ ضلعی دیگر می‌سازیم و این کار را تا بی‌نهایت مرحله انجام می‌دهیم. حد مجموع مساحت‌ها و محیط‌های این ۶ ضلعی‌ها را بیابید.

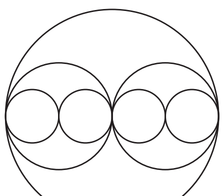
*۳۹- در مربعی به ضلع یک وسط اضلاع را به هم وصل می‌کنیم و بخشی از آن را رنگ می‌کنیم. مطابق شکل زیر اگر این روند رنگ‌آمیزی ادامه داشته باشد، در نهایت چه سطحی از مربع رنگ می‌شود؟



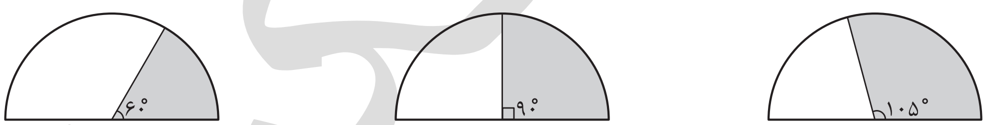
*۴۰- موجی بر روی نیم‌دایره‌های بالای یک محور حرکت می‌کند. قطر اولیه برابر ۲ متر می‌باشد. هر بار که با محور برخورد می‌کند، ۱۰% از طول قطرش کاسته می‌شود. حد مجموع محیط‌های نیم‌دایره‌ها برابر چیست؟



۴۱- اگر دایره‌ای به شعاع R ، هر بار به دو دایره‌ی کوچک‌تر مطابق شکل تبدیل شود، در ادامه‌ی این روند:
اولاً: حد مجموع مساحت‌های کل دایره‌های تولیدشده برابر چیست؟
ثانیاً: حد مجموع محیط‌های کل دایره‌های تولیدشده برابر چیست؟

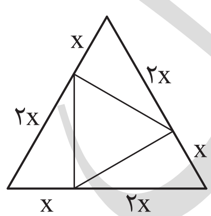


۴۲- یک نیم‌دایره را به صورت زیر به ترتیب (۱) ، (۲) و (۳) مطابق شکل رنگ می‌کنیم. اگر این روند را برای رنگ کردن سطح نیم‌دایره ادامه دهیم، در نهایت چه سطحی از نیم‌دایره رنگ می‌شود؟

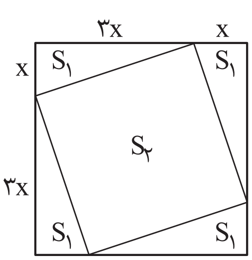


(۱) (۲) (۳)

۴۳- سه ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع ۳x را مطابق زیر به نسبت ۱ به ۲ تقسیم می‌کنیم، تا مثلث متساوی‌الاضلاع دیگری پدید آید. اگر این عمل را بی‌شمار تکرار کنیم. مجموع مساحت‌های مثلث‌های متساوی‌الاضلاع چه می‌شود؟



*۴۴- اضلاع مربعی به ضلع ۴x را مطابق زیر به نسبت ۱ به ۳ تقسیم می‌کنیم، تا مربع جدیدی پدید آید. اگر این عمل را بی‌شمار مرتبه تکرار کنیم، مجموع مساحت‌های مربع‌ها چه می‌شود؟



۴۵- حد مجموع عبارات ...۲/۳۱۳۱ ، ...۰/۱۲۳۱۲۳ و ...۰/۴۲۴۲– را بیابید.

تقسیم چندجمله‌ای‌ها و بخش‌پذیری

۴۶- اگر $P(x)$ عبارتی درجه‌ی سوم باشد که ضریب x^3 در آن ۲ باشد و $P(0)=2$ ، $P(1)=3$ و $P(-1)=1$ باشد، عبارت $P(x)$ را بنویسید.

* ۴۷- نشان دهید یکی از فاکتورهای $f(x)=x^3-8x^2+9x-2$ برابر $x-1$ می‌باشد و معادله‌ی $f(x)=0$ را حل کنید.

۴۸- اگر یکی از ریشه‌های معادله‌ی $x^3+ax^2+3=0$ برابر -2 باشد، ریشه‌های دیگر معادله را در صورت وجود بیابید.

* ۴۹- یک تابع چندجمله‌ای درجه‌ی سوم که ضریب x^3 در آن یک است ریشه‌ی ساده‌ای برابر با -1 و ریشه‌ی مضاعفی برابر با ۴ دارد. ضابطه‌ی تابع را تعیین کنید.

۵۰- باقی‌مانده‌ی $P(x)=x^4+1$ را بر x^2+1 بیابید.

۵۱- باقی‌مانده‌ی تقسیم عبارت $x^6-2x^3+x^2-x+1$ را بر x^3+1 بیابید.

۵۲- اگر باقی‌مانده‌ی $P(x)=x^4+x^3+mx+n$ بر $x+1$ و $x-1$ به ترتیب ۵ و ۳ باشد، باقی‌مانده‌ی $P(x)$ بر x^2-x را بیابید.

* ۵۳- باقی‌مانده‌ی تقسیم $P(x)=x^3+x^2+x+1$ را بر x^2-3x+2 بیابید.

* ۵۴- باقی‌مانده‌ی تقسیم $P(x)=x^3+x^2+x+1$ را بر $(x-1)^2$ بیابید.

* ۵۵- a و b را چنان بیابید که باقی‌مانده‌ی تقسیم عبارت ax^3+bx^2-x-2 بر x^2+1 برابر x باشد.

۵۶- a و b را طوری بیابید که عبارت $P(x)=x^3+x^2+ax+b$ بر x^2-1 بخش‌پذیر شود.

۵۷- باقی‌مانده‌ی تقسیم عبارت x^{26} بر x^2+x+1 را بیابید.

۵۸- اگر باقی‌مانده‌ی تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x-1$ و $x+2$ به ترتیب ۱ و ۴ باشد، باقی‌مانده‌ی تقسیم $P(x)$ بر x^2+x-2 را بیابید.

* ۵۹- اگر باقی‌مانده‌ی $P(x)$ بر $x+1$ برابر ۲ ، بر $x-1$ برابر ۱ و بر x برابر صفر باشد. باقی‌مانده‌ی $P(x)$ بر x^3-x را بیابید.

۶۰- اگر باقی‌مانده‌ی $P(x)$ بر x^2+x+1 برابر $x+1$ و باقی‌مانده‌ی $R(x)$ بر x^2+x+1 برابر $x+2$ باشد، باقی‌مانده‌ی $P(x).R(x)$ بر x^2+x+1 را بیابید.

* ۶۱- اگر باقی‌مانده‌ی تقسیم $P(x)$ بر x^3-1 برابر x^2+4x-7 باشد، باقی‌مانده‌ی تقسیم $P(x)$ بر x^2+x+1 را بیابید.

*۶۲- اگر باقی‌مانده‌ی تقسیم $P(x)$ بر $x^{۲}-۳x-۴$ برابر $۳x-۱$ باشد، باقی‌مانده‌ی تقسیم $P(x)$ بر $x+۱$ را بیابید.

۶۳- باقی‌مانده‌ی تقسیم $P(x)=x^{۱۰۰}-۹x^{۹۹}+۲x+۱$ بر $x^{۲}-۱۰x+۹$ را بیابید.

* ۶۴- چندجمله‌ای $x^{۳}+ax+۱$ بر $x^{۲}-۳x+b$ بخش‌پذیر است. $a+۲b$ را بیابید. **(المپیاد ایران – ۸۲)**

۶۵- کسرهای زیر را ساده کنید.

الف) $\frac{x^{۶}-۱}{x^{۴}-۱}=$

ب) * $\frac{x^{۱۰}-۱۰۲۴}{x^{۲}-۴}=$

پ) * $\frac{x^{۱۲}-۱}{x^{۴}-۱}=$

ت) * $\frac{x^{۱۵}+۱}{x^{۳}+۱}=$

بسط دوجمله‌ای غیاث‌الدین جمشیدکاشانی

۶۶- بسط دوجمله‌ای $(x^{۲}+y)^{۶}$ را بنویسید.

۶۷- در بسط $(x+۲y)^{۸}$ مطلوب است:

الف) تعداد جملات ب) مجموع ضرایب پ) جمله‌ی پنجم بسط

*۶۸- مجموع ضرایب بسط $(\frac{۵}{۲}x-۲y-\frac{۱}{۲})^{۶}$ را بیابید.

*۶۹- در بسط $(x-۳y)^{۵}$ جمله‌ی سوم بسط را بیابید.

۷۰- اگر a و b اعداد طبیعی و جمله‌ی سوم بسط $(a+b)^{۵}$ برابر ۷۲۰ باشد. $a+b$ چه‌قدر است؟

۷۱- در بسط $(x+\frac{۱}{\sqrt{x}})^{۴}$ جمله‌ی دوم، را بیابید.

۷۲- در بسط $(a+b)^{n}$ اگر ضریب جمله‌ی نهم مساوی ضریب جمله‌ی بیستم باشد، بزرگ‌ترین ضریب جملات این بسط کدام است؟

۷۳- کدام جمله از بسط $(x^{۳}+\frac{۱}{x})^{۸}$ مستقل از x است؟

*۷۴- اگر جمله‌ی سوم بسط $(\sqrt[۳]{x}+\frac{۱}{x})^{۵}$ برابر $\frac{۵}{۲}$ باشد. x را بیابید.

*۷۵- جمله‌ی سوم $(\sqrt[۳]{x^{۲}}+\frac{۱}{x})^{n}$ فاقد x است. n را بیابید.

۷۶- در بسط $(x^{۳}+x)^{۱۲}$ چندمین جمله‌ی دارای عامل $x^{۳۰}$ می‌باشد؟

*۷۷- ضرایب جملات اول، دوم و سوم بسط $(\sqrt{x}+\frac{۱}{۲\sqrt[۳]{y}})^{n}$ به ترتیب جملات متوالی یک دنباله می‌باشد. n را بیابید.

ب. م. م. و ک. م. م.

۷۸- اعداد زیر را به صورت تجزیه‌ی استاندارد بنویسید.

الف) $125000 =$ ب) $10240 =$ *

* ۷۹- در تجزیه‌ی عدد A به عوامل اول، توان عدد ۳ برابر ۷ است. توان ۳ در تجزیه‌ی عدد $30A$ را بیابید.

۸۰- ب. م. م. و ک. م. م. اعداد ۵۶، ۲۱، ۱۴ و ۷۲، ۴۸، ۳۲ * را بیابید.

* ۸۱- اگر ب. م. م. و ک. م. م. دو عدد ۶۰ و ۷۲ را به ترتیب با M و N نمایش دهیم، حاصل $M\times N$ را بیابید.

۸۲- در یک جاده هر ۵ دقیقه یک ماشین سواری و هر ۷۵ دقیقه یک اتوبوس و هر ۱۴۴ دقیقه یک کامیون عبور می‌کند. پس از چند دقیقه هر سه نوع ماشین در یک زمان (دقیقه) از جاده عبور می‌کنند؟

* ۸۳- با پیمانه‌های ۲، ۳ و ۵ لیتری توانسته‌ایم یک ظرف را پُرکنیم. اگر حجم ظرف عددی طبیعی باشد، حداقل ظرفیت آن را بیابید.

۸۴- ب. م. م. و ک. م. م. عبارت‌های زیر را تعیین کنید.

الف) $3x^2y^4, xy^3z, 9x^4y$

ب) $(x^2-1)^2, 3(x+1)^2, 5(x^2-1)$

* پ) $x^4-x^2y^2, (x+y)^2, 5zy(y-z)^3$

* ت) x^8-y^8, x^3-y^3

ث) $(x-3)^2, (x^2-9), (x^2-x-6)$

ج) $x^2+xy, x^3+2x^2y+xy^2$

چ) $x^2(x+2)^2, x^3-4x$

* ح) x^3-x, x^4-3x^2

* ۸۵- کوچک‌ترین مضرب مشترک دو چندجمله‌ای x^2+6x+8 و x^2-2x-8 را بر بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک آن‌ها تقسیم کرده‌ایم. حاصل تقسیم را بیابید.

* ۸۶- اگر بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک دو عبارت $x-1$ و کوچک‌ترین مضرب مشترک آن‌ها $x(x^2-1)$ باشد، حاصل‌ضرب آن دو را بیابید.

* ۸۷- اگر رابطه‌ی $\dfrac{5x-1}{x^2-1}=\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{x+1}$ نسبت به x یک اتحاد باشد، آن‌گاه A و B را بیابید.

* ۸۸- دیواری مستطیلی به ابعاد ۱۳۸ و ۶۱ سانتی‌متر را می‌خواهیم با کاشی‌های مربعی‌شکل که اندازه‌های آن‌ها اعداد طبیعی است، فرش کنیم. حداقل تعداد کاشی‌ها چه‌قدر است؟ اگر اندازه‌ی ضلع کاشی‌ها برابر باشند، حداقل تعداد چه‌قدر است؟

※ ۸۹- سالنی به ابعاد ۴۵×۳۰ متر را می‌خواهیم با فرش‌هایی به ضلع اعداد طبیعی بپوشانیم. (فرش‌ها روی هم واقع نمی‌شوند.)

الف) در صورتی که فرش‌ها مربع و هم‌اندازه باشند، حداقل تعداد فرش‌ها را بیابید.

ب) در صورتی که فرش‌ها مربع اما ضلع فرش‌ها هم‌اندازه نباشند. از بزرگ‌ترین فرشی که امکان دارد شروع شود چند فرش و به چه ابعادی مورد نیاز است؟

※ ۹۰- مکان مستطیل‌شکلی به ابعاد ۱۷۵ و ۶۵ سانتی‌متر داریم. می‌خواهیم با کاشی‌های مربع‌شکلی (ضلع طبیعی) این مکان را کاشی کنیم طوری که کم‌ترین تعداد کاشی را به‌کار ببریم. اندازه‌ی کاشی‌ها باید از بزرگ‌ترین کاشی که امکان دارد شروع شود. اندازه‌ی کاشی‌ها باید چه‌قدر باشد؟ اگر بخواهیم اندازه‌ی ضلع کاشی‌های مربع‌شکل هم یکی باشند، چه تعداد کاشی مورد نیاز است؟

معادله‌ی درجه‌ی دو

۱۰۷- معادله‌ی درجه‌ی دومی بنویسید که ریشه‌های آن $a+\sqrt{a}$ و $a-\sqrt{a}$ باشد.

※ ۱۰۸- معادله‌ی درجه‌ی دومی بنویسید که ریشه‌هایش $\sqrt{۳}+\sqrt{۲}$ و $\sqrt{۳}-\sqrt{۲}$ باشد.

۱۰۹- سن فردی را از او پرسیدند و او گفت ۳۴ سال بعد سن من توان دوم سنی خواهد بود که ۲۲ سال قبل از این داشتم، سن او را تعیین کنید.

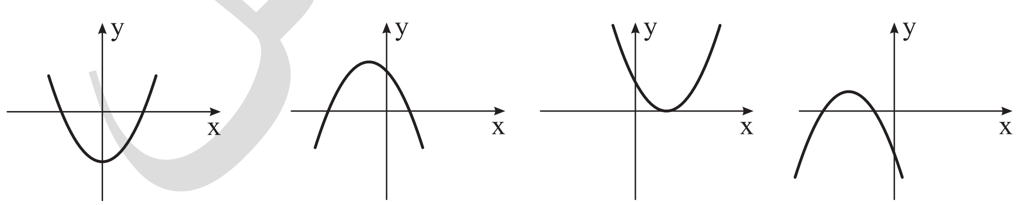
※ ۱۱۰- حاصل‌ضرب نصف عددی به علاوه‌ی یک در ثلث آن منهای یک، برابر ۴ می‌گردد. آن عدد کدام است؟

۱۱۱- با توجه به علامت ضرایب a ، b و c راجع به تعداد ریشه‌های $ax^۴+bx^۲+c=۰$ بحث کنید.

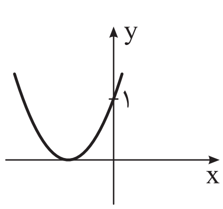
※ ۱۱۲- با توجه به علامت ضرایب a ، b و c راجع به تعداد ریشه‌های $ax+b\sqrt{x}+c=۰$ بحث کنید.

۱۱۳- با توجه به شکل‌های زیر علامت‌های ضرایب a ، b و c را در تابع $f(x)=ax^۲+bx+c$ تعیین کنید.

۱) ۲) ۳) ※ ۴) ※

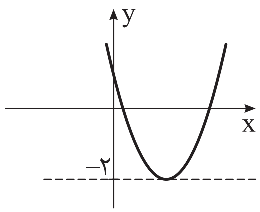


۱۱۴- با توجه به نمودار مقابل، m را در تابع $f(x)=x^۲+mx+c$ بیابید.



※ ۱۱۵- اگر بیش‌ترین مقدار تابع $y=ax^۲+x+۲$ برابر -۱ گردد. a را تعیین کنید.

* ۱۱۶- با توجه به شکل مقابل مقدار m را در تابع $f(x)=x^۲+mx+۲$ بیابید.



* ۱۱۷- در معادله‌ی $(x+۳)^۲+(x+۳)-۱=۰$ حاصل $x_۱x_۲+۳x_۱+۳x_۲$ را بیابید.

* ۱۱۸- اگر نمودار تابع $y=x^۲+mx+m-۳$ از ناحیه‌های اول، دوم و سوم عبور کند، حدود m را بیابید.

۱۱۹- اگر x' و x'' جواب‌های معادله‌ی $ax^۲+bx+c=۰$ باشند با محاسبه‌ی مستقیم نشان دهید:

$$|x'-x''|=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$$

۱۲۰- اگر یکی از ریشه‌های معادله‌ی $ax^۲+bx+c=۰$ ، K برابر دیگری باشد، ثابت کنید:

$$\frac{K}{(K+۱)^۲}=\frac{ac}{b^۲}$$

* ۱۲۱- اگر یکی از ریشه‌های معادله‌ی $ax^۲+bx+c=۰$ ، K واحد از دیگری بیش‌تر باشد، ثابت کنید:

$$K^۲=\frac{b^۲-۴ac}{a^۲}$$

۱۲۲- اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $x^۲-۴x+۱=۰$ باشند، حاصل $A=|\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}|$ را به دست آورید.

۱۲۳- اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $x^۲-۹m^۲x+۸=۰$ باشند به‌طوری‌که $\sqrt[۳]{\alpha}+\sqrt[۳]{\beta}=۳$ باشد، مقدار $m^۴+۱$ را به دست آورید.

* ۱۲۴- در معادله‌ی $x^۲+۳mx+۲=۰$ اگر مجموع مربعات ریشه‌ها برابر ۵ باشد، m را به دست آورید.

۱۲۵- در معادله‌ی $x^۲-۳x+۲m=۰$ اگر α و β ریشه‌های معادله باشند و داشته باشیم $۳\alpha+۲\beta=۷$ مقدار m را به دست آورید.

* ۱۲۶- اگر یکی از ریشه‌های معادله‌ی $x^۲+x+m=۰$ از معکوس دیگری ۲ واحد بیش‌تر باشد، m را بیابید.

۱۲۷- مقدار m را طوری تعیین کنید که یکی از ریشه‌های معادله‌ی $x^۲-۶mx+۸=۰$ مربع ریشه‌ی دیگر باشد.

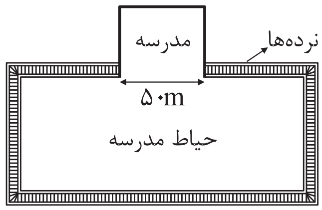
* ۱۲۸- در معادله‌ی $mx^۲-۵x+m^۲-۶=۰$ مقدار m را طوری تعیین کنید که:

الف) دو ریشه معکوس یکدیگر باشند.

ب) دو ریشه معکوس و قرینه‌ی یکدیگر باشند.

۱۲۹- اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $۳x^۲-x-۱=۰$ باشند، معادله‌ای درجه دو بنویسید که ریشه‌هایش $۱-\frac{۲}{\alpha}$ و $۱-\frac{۲}{\beta}$ باشد.

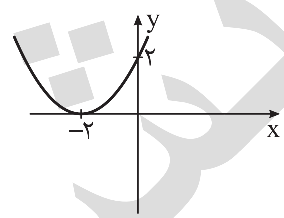
۱۳۰- مطابق شکل برای کشیدن حصار دور زمین مستطیل‌شکلی به ۱۷۰ متر نرده نیازداریم. ابعاد مستطیل را محاسبه کنید. (مساحت حیاط مدرسه ۲۸۰۰ مترمربع است.)



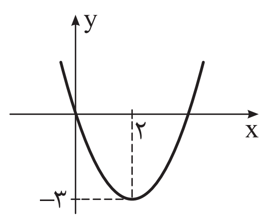
* ۱۳۱- معادله‌ی درجه‌ی دومی بنویسید که ریشه‌هایش ۳ برابر ریشه‌های معادله‌ی $x^2+x-3=0$ باشد.

۱۳۲- با توجه به نمودارهای زیر، تابع‌های آن‌ها را تعیین کنید.

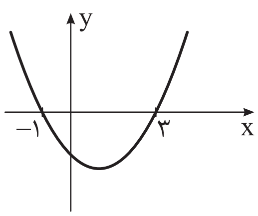
* ۱)



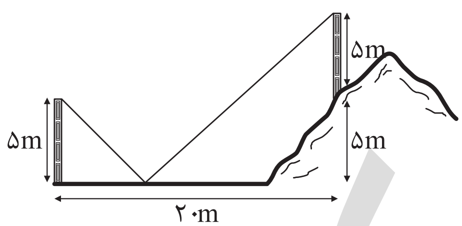
* ۲)



۳)



۱۳۳- دو تیر به ارتفاع ۵ متر مطابق شکل به فاصله‌ی ۲۰ متر از هم قرار دارند، که باید سیمی از دو سر آن‌ها به زمین وصل شود. این سیم را کجا به زمین وصل کنیم تا جمع مربعات طول سیم‌ها تا زمین کم‌ترین گردد.



۱۳۴- کم‌ترین مقدار $f(x)=\tan x+4\cot x$ را بیابید. $(0<x<\frac{\pi}{2})$

* ۱۳۵- کم‌ترین مقدار $f(x)=\frac{x^2+1}{x^2}+\frac{x^2}{4x^2+4}$ را بیابید.

۱۳۶- مستطیلی با مساحت Max را درون یک مثلث قائم‌الزاویه با ابعاد ۳ و ۴ چنان محاط کنید که یک رأس آن روی وتر و دو ضلع آن واقع بر ساق‌های مثلث باشند.

۱۳۷- اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $x^2+x-3=0$ باشند بدون حل معادله، حاصل عبارات زیر را بیابید.

* الف) $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}=$

ب) $\frac{\alpha^2}{\beta}+\frac{\beta^2}{\alpha}=$

پ) $\alpha^3+\alpha^2+3\beta=$

ت) $\frac{\alpha^2+\alpha}{\beta^2+\beta}+\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=$

* ث) $\frac{\alpha}{\beta+1}+\frac{\beta}{\alpha+1}=$

معادله‌ی دومجذوری

۱۳۸- معادله‌ای بنویسید که ریشه‌هایش عکس ریشه‌های معادله‌ی $x^4+2x^3-5x^2-\frac{1}{2}x-11=0$ باشد.

۱۳۹- معادله‌ای با ضرایب صحیح و کم‌ترین درجه تشکیل دهید که یکی از ریشه‌های آن $x=\sqrt{\sqrt{2}+1}$ باشد.

* ۱۴۰- معادله‌ی $x^4-13x^2+36=0$ را حل کنید.

* ۱۴۱- معادله‌ی $2(\sin x+1)^4-(\sin x+1)^2-3=0$ دارای چند مقدار برای $\sin x$ می‌باشد؟

۱۴۲- معادله‌ی $(x+\frac{1}{x})^2-3(x+\frac{1}{x})+1=0$ دارای چند ریشه است؟ (آزاد – ۸۸)

۱۴۳- معادله‌ی $(x^2-2x)^2-3(x^2-2x)+2=0$ چند ریشه دارد؟

۱۴۴- ریشه‌های معادله‌ی $(2^x+2^{-x})^2=\frac{25}{4}$ را بیابید.

معادلات

۱۴۵- معادلات کسری زیر را حل کنید.

* الف) $\frac{x}{x^2-x-2}-\frac{2}{x^2-2x-3}=\frac{1}{x^2-5x+6}$

* ب) $\frac{1}{x}+\frac{x}{x+1}=\frac{3}{2}$

پ) $\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}=\frac{x+2}{x}$

* ت) $\frac{x+5}{x-1}-\frac{6}{x^2+x+1}-\frac{6(x^2+2)}{x^3-1}=0$

* ث) $\frac{1-2x}{x+2}+\frac{x+1}{x-2}=0$

* ج) $\frac{2x-\frac{1}{2x}}{1-\frac{1}{8x^3}}=2x+3$

* چ) $\frac{x+1}{x}+\frac{x}{x+1}=1$

* ح) $\frac{3x^2-10x+4}{x^2-4x}+\frac{1-x}{x-4}=1$

خ) $\frac{x}{x-3}-\frac{1}{2x-1}=\frac{5x}{2x^2-7x+3}$

د) $\frac{1}{(x-2)^2}+\frac{4}{x-2}+3=0$

ذ) $\frac{۱}{(x^۲-x)^۲+۱}+\frac{۱}{(x^۲-x)^۲+۲}=\frac{۳}{۲}$

ر) $\frac{x^۲+۱}{x}+\frac{x}{x^۲+۱}=۲$

❊ ز) $\frac{۱}{(\sqrt{x}+۱)^۲-۲}+\frac{۱}{(\sqrt{x}+۱)^۲-۱}=\frac{۵}{۶}$

ژ) $\frac{۱}{x^۲-۲x+۲}+\frac{۲}{x^۲-۲x+۳}=\frac{۶}{x^۲-۲x+۴}$

۱۴۶- دو شیر آب استخری را در ۷/۵ ساعت پُر می‌کنند. اگر شیر A بتواند به تنهایی ۲۰ ساعت بعد از شیر B (به تنهایی) استخر را پُر کند. شیر A پس از چند ساعت استخر را پر می‌کند؟

۱۴۷- معادلات رادیکالی زیر را حل کنید.

الف) $\sqrt{۲x}-\sqrt{x+۱}=۰$

ب) $\sqrt{۲x}+\sqrt{x+۱}=۰$

❊ پ) $\sqrt{x^۲-۵}+۲\sqrt{x}=۰$

ت) $\sqrt{x}+\sqrt{x+۵}=۵$

❊ ث) $\sqrt{x}+\sqrt{x+۳}=۳$

❊ ج) $\sqrt{x-۳}=۳-\sqrt{x}$

❊ چ) $\sqrt{۱+\sqrt{x^۴-x^۲}}=x-۱$

❊ ح) $\sqrt{a-x}+\sqrt{a+x}=\sqrt{۲a}$

خ) $\sqrt{x+۱}-\frac{۲}{\sqrt{x+۱}}=۱$

❊ د) $\sqrt{x-۲+\sqrt{۲x-۵}}+\sqrt{x+۲+۳\sqrt{۲x-۵}}=۷\sqrt{۲}$

❊ ذ) $۲x+۱=\sqrt{۱۱x-۲}$

❊ ر) $\sqrt{x^۲+۳x-۴}-\sqrt{x^۲+۳x}=۷$ (ویژه دانش‌آموزان سخت کوش)

ز) $\sqrt[۳]{۲x}+\sqrt[۳]{x+۱}=۱$

❊ ژ) $\sqrt[۳]{x}+\frac{۱}{\sqrt[۳]{x}}=\frac{۵}{۲}$

❊ س) $\sqrt{\sqrt{x-۱}+۱}+\sqrt{\sqrt{x-۱}-۱}=۲$

※ ش) $\sqrt{\frac{۲+x}{۱-x}}+\sqrt{\frac{۱-x}{۲+x}}=۲$

ص) $\sqrt[۳]{x-\frac{۲}{x}}+\sqrt[۳]{\frac{x}{x^{۲}-۲}}=-۲$

ض) $\sqrt{x^{۲}+۳x+۱۲}+\sqrt{x^{۲}+۳x+۵}=۷$

ط) $\sqrt[۳]{\sqrt{x^{۲}-۳}+۷}+\sqrt[۳]{۹-\sqrt{x^{۲}-۳}}=۴$ (ویژه دانش‌آموزان سخت کوش)

※ ظ) $\sqrt[۴]{x^{۵}-۱۶}+\sqrt{x^{۵}-۱۶}=۶$

۱۴۸- نقاطی روی خط $y=۲x+۱$ بیابید که فاصله‌ی آن از مبداء مختصات برابر $\sqrt{۱۰}$ گردد.

※ ۱۴۹- عددی را بیابید که تفاضل جذرش از ۲ برابرش، برابر ۶ گردد.

حل معادلات به روش هندسی

۱۵۰- معادله‌ی $(\frac{۱}{۳})^{x}=۳^{x}$ را به روش هندسی حل کنید.

※ ۱۵۱- معادله‌ی $\frac{۱}{x}=۱+(x-۱)^{۳}$ را به روش هندسی حل کنید.

۱۵۲- تعداد ریشه‌های معادله‌ی $\sin x=\frac{۲x}{۵\pi}$ را به روش هندسی به دست آورید.

۱۵۳- تعداد ریشه‌های معادله‌ی $\sqrt{x}+۲x=x^{۲}-۲$ را به روش هندسی به دست آورید.

※ ۱۵۴- معادله‌ی $\sin x=\frac{۲}{x}$ در بازه‌ی $(۰,+\infty)$ چند ریشه دارد؟

※ ۱۵۵- معادلات زیر را به روش هندسی حل کنید.

الف) $۲^{x}+x^{۲}=۱$

ب) $|x^{۲}-۱|-x=۱$

پ) $|x+۱|+|x-۵|=۷$

۱۵۶- معادله‌ی $|x|=\log x$ در $\mathbb{R}$ چند ریشه دارد؟

قدر مطلق

۱۵۷- حاصل عبارت‌های زیر را بدون قدر مطلق بنویسید.

※ الف) $|۲-\sqrt{۳}|=$

※ ب) $|\sqrt{۳}-\sqrt{۵}|=$

پ) $\sqrt{۵-۲\sqrt{۶}}=$

❋ ت) $\sqrt{۴-۲\sqrt{۳}} =$

ث) $\sqrt{x^۴+۴x^۲+۴} =$

❋ ج) $\sqrt{x^۲+\frac{۱}{x^۲}-۲} =$ $\qquad (۰<x<۱)$

چ) $\sqrt{۱-۲\sin x\cos x} =$ $\qquad (۰<x<\frac{\pi}{۴})$

❋ ۱۵۸- هرگاه $-۱<x<۰$ باشد، حاصل $|x-\frac{۱}{x}|+|x+\frac{۱}{x}|$ را بیابید.

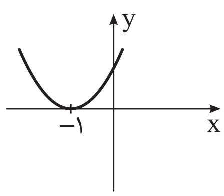
۱۵۹- با فرض $x^۲+۴x+۳\le ۰$ حاصل $A=|۱-۲x|-|۳x+۲|$ را بدون قدر مطلق بنویسید.

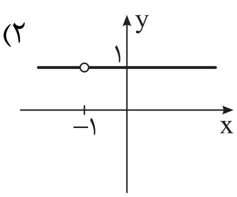
(آزمون سازمان سنجش)

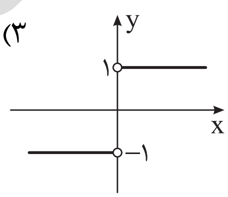
❋ ۱۶۰- کدام گزینه برابر تابع $f(x)=\begin{cases}۲ & x>۰\\ -۲ & x<۰\end{cases}$ می‌باشد؟

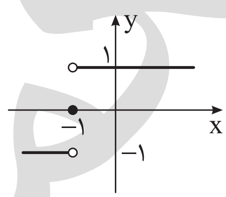
۱) $۲|x|$ ۲) ± ۲ ۳) $\frac{۲|x^۳|}{x^۲|x|}$ ۴) $\frac{|۲x|}{x}$

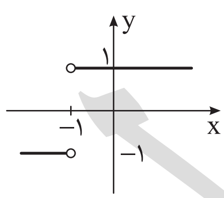
❋ ۱۶۱- اگر نمودار f به صورت مقابل باشد، $g(x)=\frac{f(x)}{|f(x)|}$ کدام است؟



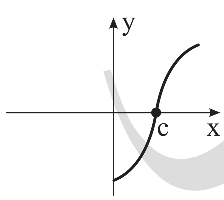
۱)


۲)


۳)


۴)


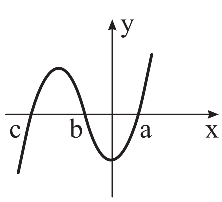
۱۶۲- اگر نمودار f به صورت شکل مقابل باشد، نمودار توابع زیر را رسم کنید.



الف) $y=\frac{f(x)}{|f(x)|}$

ب) $y=\frac{f(x)+|f(x)|}{۲}$

۱۶۳- اگر نمودار f به صورت شکل مقابل باشد، نمودارهای زیر را رسم کنید.



الف) $|f(x)|=$

ب) $f(|x|)=$

پ) $|f(|x|)|=$

❋ ۱۶۴- به ازای $a>۰$ ثابت کنید که $-a<x<a$ اگر و تنها اگر $|x|<a$.

۱۶۵- عبارت $|۲x-۱|<۰/۴$ را ساده نمایید و آن را به صورت فارسی بیان نمایید.

۱۶۶- نامساوی‌های زیر را به صورت $|x-\alpha|<\beta$ بنویسید.

الف) $۲<x<۴$

ب) $-۵<x<-۳$ ❊

پ) $-۳<x<۲$ ❊

۱۶۷- ثابت کنید:

الف) $|x+y|\leq|x|+|y|$

ب) $|x-y|\geq|x|-|y|$ ❊

پ) $|x-y|\geq\big||x|-|y|\big|$ ❊

۱۶۸- ثابت کنید به ازای هر عدد حقیقی غیرصفر داریم: $|a+\frac{۱}{a}|\geq۲$

❊ ۱۶۹- اگر رابطه‌ی $|x+y+z|\leq|x|+|y|+|z|$ به تساوی تبدیل شود، الزاماً z ، y و x چگونه‌اند؟

(سراسری – ۸۶)

۱۷۰- ضابطه‌ی عبارت‌های زیر را بدون قدر مطلق بنویسید.

الف) $f(x)=x^{۲}|x|$

ب) $f(x)=|x-۲|+|x+۲|$

پ) $f(x)=|x+۲|-|x-۲|$ ❊

ت) $f(x)=|x|(x-۳)$ ❊

ث) $f(x)=x|x-۳|$ ❊

ج) $f(x)=|x||x-۳|$

چ) $f(x)=\frac{x}{|x|}$

۱۷۱- معادلات قدر مطلقی زیر را حل کنید.

الف) $|۲x-۵|=۱$ ❊

ب) $\big||x-۱|+۱\big|=۲$

پ) $\big|x+|x|\big|=۲$ ❊

ت) $|x-۲|=۲x+۱$

ث) $x^{۲}|x|=۸$ ❊

ج) $|۲x|+|x-۱|=۴$

چ) $|x-۱|+|x-۳|=۵$ ❊

۱۷۲- اگر معادله‌ی $|x-۴m|+|x-۶m|=۲$ دارای دو ریشه‌ی حقیقی باشد، حدود m را تعیین کنید.

۱۷۳- معادلات قدر مطلق زیر را به روش هندسی حل کنید.

الف) $|x| = \sqrt{|x|}$

ب) $|\sin x| - |x| = ۱$ ❋

پ) $\sin x = |\frac{۲}{\pi} x|$

ت) $|\sin x| = |\cos x|$ ❋

ث) $|x - ۱| + |x + ۱| = ۲$

ج) $۳^{|x|} = |x| + ۱$ ❋

چ) $|\log x| = a^x$ ❋

ح) $\sin|x| = x^۲ - |x|$

خ) $\log|x| = x^۲$ ❋

د) $|\frac{۱}{x}| = \cos x$

۱۷۴- نمودارهای زیر را رسم کنید.

الف) $y = |x - ۲|$ ❋

ب) $|y - ۲| = x + ۱$

پ) $|x| + |y - ۱| = ۲$

ت) $|x| - |y - ۱| = ۲$ ❋

ث) $y = x + \frac{x - ۲}{|x - ۲|}$ ❋

❋ ۱۷۵- مساحت محدود به نمودار تابع‌های $y = ۲ - |x + ۱|$ و $y = |x + ۱| - ۲$ را بیابید.

۱۷۶- نمودار تابع $y = |x - ۲| + |x - ۴|$ با خط $y = x$ یک مثلث می‌سازد. مساحت مثلث را بیابید.

❋ ۱۷۷- با کمک رسم تعیین کنید، معادله‌ی $|x - ۲| + |x - ۴| = ۷$ چند ریشه دارد؟

۱۷۸- برای این‌که تعداد ریشه‌های معادله‌ی $|x^۲ - ۱| = K$ بیش‌ترین باشد، حدود K را بیابید.

۱۷۹- اگر $-۵ < x < ۱$ باشد، حدود $|x + ۱|$ را بیابید.

نامعادله‌ها

۱۸۰- نامعادله‌های زیر را حل کنید.

الف) $|x - ۲| < |x + ۳|$

ب) $|x - ۲| < x + ۳$

پ) $x-۲<|x+۳|$

❋ ت) $|x|>x+۲$

ث) $\big||x-۲|-۳\big|<۴$

❋ ج) $\sqrt{x^۲-۲x+۱}+۳x<-۵$

چ) $|x^۳-۸|<x^۲+۲x+۴$

❋ ح) $\frac{۳-|x-۱|}{۱+|x-۳|}\ge ۱$

❋ خ) $x^۲-۳|x|+۲\le ۰$

❋ د) $\frac{|x-۱|}{x^۲+۱}<۱$

❋ ذ) $\frac{۲\sqrt{x}+۲}{۳\sqrt{x}+۱}>۱$

❋ ر) $|x-۲|\ge\sqrt{x}$

ز) $\sqrt{x-۱}+\sqrt{x+۲}\le ۱$

❋ ژ) $|x|(x^۲-۴x+۳)<۰$

❋ س) $|۵x-۳|\ge ۷$

❋ ش) $|x-۳|\le ۰$

❋ ص) $۲x-۳|x-۱|\ge x$

❋ ض) $|x+۳|-۲|x-۱|\ge x$

❋ ط) $\sqrt{x^۲-۳}<\sqrt{۲x}$

❋ ظ) $\sqrt{x+۱}+\sqrt{x-۱}<\sqrt{۲}$

۱۸۱- به ازای چه مقدار a نامساوی $۲<\frac{x^۲+۳x+a}{x^۲+x+۱}$ همواره برقرار است؟

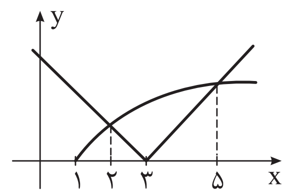
❋ ۱۸۲- مجموعه جواب نامعادله‌ی $۰<\frac{(x^۳-۸)(۲x-۷)}{(۴x-۱۱)^۲}$ کدام است؟

۱) $|x-\frac{۱۱}{۴}|<\frac{۳}{۴}$ ۲) $۰<|x-\frac{۳}{۴}|<\frac{۱۱}{۴}$ ۳) $۰<|x-\frac{۱۱}{۴}|<\frac{۳}{۴}$ ۴) $|x-\frac{۳}{۴}|<\frac{۱۱}{۴}$

❋ ۱۸۳- مجموعه جواب نامعادله‌ی $|x+۱|<\big||x|-۴\big|$ بازه‌ی (a,b) می‌باشد. طول این بازه را بیابید.

۱۸۴- اگر $۱\le|x+۱|$ آن‌گاه $K\le\left|\frac{۱}{۲x+۵}\right|\le K'$ می‌باشد. مقدار $K+K'$ را به دست آورید.

۱۸۵- با توجه به نمودار دو تابع $f(x)=\sqrt{x-1}$ و $g(x)=|x-3|$ نامعادله‌ی $|x-3|\geq\sqrt{x-1}$ را حل کنید.



۱۸۶- با روش هندسی نامعادله‌های زیر را حل کنید.

الف) $|x-2|>\sqrt{x-2}$

ب) $|\sin x|\geq|x|$

پ) $2^x\geq\log x$ ❋

ت) $|x-2|+|x+2|\geq|x|$ ❋

ث) $\frac{1}{x}<\sqrt{x}$ ❋

ج) $|x|<x^2$ ❋

❋۱۸۷- مجموعه جواب نامعادلات زیر را به دست آورید.

الف) $\frac{2x+3}{x^2-1}>\frac{x+6}{x^2-x-2}$

ب) $\frac{x^2-3x+2}{x^2+1}>0$

پ) $\frac{(|x|+2)(3-x)}{x+4}<0$

ت) $\frac{1}{x-1}+4<3-\frac{2x}{x-1}$

افلاطون :

ریاضیات روح را صفا می‌بخشد و ذهن را برای درک حقیقت آماده می‌کند.

پاسخ فصل اول

مجموع دنباله‌ها و محاسبات جبری و معادلات و نامعادلات

۲- از آن‌جایی که $x+2$، $2x+7$ و $7-2x$ جملات متوالی دنباله‌ی حسابی‌اند، پس:

$$2x+7=\frac{(2+x)+(7-2x)}{2}\Rightarrow 4x+14=9-x\Rightarrow 5x=-5\Rightarrow x=-1\rightarrow 1\,,\,5\,,\,9\,,\,...$$

$$S_n=\frac{n}{2}[2a_1+(n-1)d]\Rightarrow S_{10}=\frac{10}{2}[2(1)+9(4)]=5\times 38=190$$

۴- $$S_n=\frac{\cancel{11}^{1}}{2}[2K+(11-1)K]=\cancel{462}^{42}\Rightarrow\frac{12K}{2}=42\Rightarrow 6K=42\Rightarrow K=7$$

۶-

$$S_{20}=3S_{12}\Rightarrow\frac{20}{2}[2a_1+19d]=3(\frac{12}{2}[2a_1+11d])\Rightarrow 20a_1+190d=36a_1+198d$$

$$\Rightarrow 16a_1+8d=0\Rightarrow 2a_1+d=0\Rightarrow d=-2a_1$$

$$a_3=6\Rightarrow a_1+2d=6\Rightarrow a_1+2(-2a_1)=6\Rightarrow -3a_1=6\Rightarrow a_1=-2\Rightarrow d=4$$

$$a_{10}=a_1+9d=-2+9(4)=34$$

۱۰- $$S_n=\frac{n}{2}[2a+(n-1)d]\xrightarrow[\text{اضافه شود}]{\text{اگر به قدر نسبت یک واحد}}S_n=\frac{n}{2}[2a+(n-1)(d+1)]$$

$$\Rightarrow S_{20}=\frac{20}{2}[2a+(20-1)(d+1)]=10[2a+19(d+1)]=10[2a+19d+19]$$

$$=10[2a+19d]+190=S_{20}\ \text{قدیم}+190$$

۱۲- $$S_n=2+4+6+...+2n=n(n+1)$$

$$S_n=n(n+1)\geq 500$$

$$n=20\Rightarrow 20(21)=420<500$$

$$n=21\Rightarrow 21(22)=462<500$$

$$n=22\Rightarrow 22(23)=506>500\Rightarrow n\geq 22$$

۱۳- قدر نسبت ضریب n در جمله‌ی عمومی است. پس $d=۴$ و $a_۱=۵$ می‌باشد. لذا:

$$S_n=(a_۱+a_n)\frac{n}{۲}=(۵+۴n+۱)\frac{n}{۲}\Rightarrow S_n=(۴n+۶)\frac{n}{۲}=۲n^۲+۳n$$

۱۴- اگر از $\frac{n}{۲}$ فاکتور بگیریم، پرانتز حاصل $a_۱+a_n$ است.

$$S_n=\frac{n}{۲}(۴n+۲)\Rightarrow a_۱+a_n=۴n+۲$$

از طرفی $a_۱=S_۱$ است. پس $a_۱=S_۱=۲+۱=۳$

$$۳+a_n=۴n+۲\Rightarrow a_n=۴n-۱$$

۱۷- جملات این دنباله، تشکیل یک دنباله‌ی حسابی با جمله‌ی اول $\frac{۱}{۲۸}A$ و قدر نسبت $\frac{۱}{۲۸}A$ را می‌دهند که مجموع جملات باید برابر A گردد. پس:

$$S_n=\frac{n}{۲}[۲a+(n-۱)d]\Rightarrow A=\frac{n}{۲}[۲(\frac{۱}{۲۸}A)+(n-۱)(\frac{۱}{۲۸}A)]\Rightarrow A=\frac{n}{۲}[\frac{۲A}{۲۸}+\frac{(n-۱)A}{۲۸}]$$

$$\Rightarrow A=\frac{n}{۲}[\frac{(n+۱)A}{۲۸}]\Rightarrow ۱=\frac{n(n+۱)}{۵۶}\Rightarrow n=۷$$

یعنی پس از هفت ماه برداشت، همه‌ی سرمایه خرج می‌شود.

۲۱-

$$a_۴=a_۱q^۳\Rightarrow q^۳=۸\Rightarrow q=۲$$

$$S_۵=a(\frac{۱-q^۵}{۱-q})=۳\frac{(۱-۳۲)}{۱-۲}=۹۳$$

۲۲-

$$a_n=۲^{n+۱}\Rightarrow\{۴,۸,۱۶,...\}\Rightarrow\begin{cases}a_۱=۴\\ q=۲\end{cases}$$

$$S_n=\frac{a_۱(۱-q^n)}{۱-q}=\frac{۴(۱-(۲)^n)}{۱-۲}=۱۲۴\Rightarrow ۲^n-۱=۳۱\Rightarrow ۲^n=۳۲\Rightarrow n=۵$$

۲۳- اولین جمله‌ی این تصاعد یک و قدر نسبت نیز ۲ می‌باشد. پس:

$$S_n=\frac{a_۱(۱-q^n)}{۱-q}=\frac{۱(۱-(۲)^n)}{۱-۲}=\frac{۲^n-۱}{۲-۱}=۲^n-۱=۸۱۹۱$$

$$۲^n=۸۱۹۲\Rightarrow ۲^n=۲^{۱۳}\Rightarrow n=۱۳$$

یعنی پس از ۱۳ مرحله شایعه در کل شهر پخش می‌شود و چون هر مرحله ۰/۵ ساعت طول می‌کشد، کلاً پس از ۰/۵×۱۳ ، یعنی بعد از ۶/۵ ساعت شایعه در شهر پخش می‌گردد.

۲۵-

$$\frac{a}{q}\ ,\ a\ ,\ aq \Rightarrow (\frac{a}{q})\ .\ a\ .\ (aq) = ۲۱۶ \Rightarrow a^{۳} = ۲۱۶ \Rightarrow a = ۶$$

$$\frac{۶}{q} + ۶ + ۶q = ۱۹ \Rightarrow \frac{۶}{۹} + ۶q = ۱۳ \Rightarrow ۶q^{۲} - ۱۳q + ۶ = ۰$$

$$q = \begin{cases} \frac{۳}{۲} \\ \frac{۲}{۳} \end{cases} \Rightarrow \frac{۶}{\frac{۳}{۲}}\ ,\ ۶\ ,\ ۶\times\frac{۳}{۲} \Rightarrow ۴\ ,\ ۶\ ,\ ۹ \Rightarrow ۹ - ۴ = ۵$$

۲۶-

الف) $a_{۳۰} = a_{۱}q^{۲۹} = ۴/۰۰۰/۰۰۰\times(۱/۱)^{۲۹}$

ب) $S_{۳۰} = \dfrac{a_{۱}(۱-q^{n})}{۱-q} = \dfrac{۴/۰۰۰/۰۰۰(۱-(۱/۱)^{۳۰})}{۱-(۱/۱)} = ۴۰/۰۰۰/۰۰۰((۱/۱)^{۳۰}-۱)$

۲۷-

$$(۱+x+x^{۲}+...+x^{۸})(۱-x+x^{۲}-...+x^{۸}) = (۱\times\frac{۱-x^{۹}}{۱-x})(۱\times\frac{۱-(-x)^{۹}}{۱-(-x)})$$

$$= \frac{(۱-x^{۹})(۱+x^{۹})}{۱-x^{۲}} = \frac{۱-x^{۱۸}}{۱-x^{۲}} = \frac{۱-(\sqrt{۲})^{۱۸}}{۱-(\sqrt{۲})^{۲}}$$

$$= \frac{۱-۵۱۲}{۱-۲} = ۵۱۱$$

۲۸- **راه حل اول:**

$$\begin{cases} S_{۳} = \dfrac{a_{۱}(۱-q^{۳})}{۱-q} = ۱۳۶ \\ S_{۶} = \dfrac{a_{۱}(۱-q^{۶})}{۱-q} = ۱۵۳ \end{cases} \Rightarrow \frac{S_{۶}}{S_{۳}} = \frac{\frac{a_{۱}(۱-q^{۶})}{۱-q}}{\frac{a_{۱}(۱-q^{۳})}{۱-q}} = \frac{۱-q^{۶}}{۱-q^{۳}} = \frac{۱۵۳}{۱۳۶}$$

$$\frac{(۱-q^{۳})(۱+q^{۳})}{۱-q^{۳}} = ۱+q^{۳} = \frac{۱۵۳}{۱۳۶} = \frac{۹}{۸} \Rightarrow q^{۳} = \frac{۱}{۸} \Rightarrow q = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \frac{a_{۱}}{a_{۵}} = \frac{a_{۱}}{a_{a}q^{۴}} = \frac{۱}{q^{۴}} = \frac{۱}{(\frac{۱}{۲})^{۴}} = ۱۶$$

راه حل دوم:

$$\frac{S_{۲n}}{S_{n}} = ۱+q^{n} \Rightarrow \frac{S_{۶}}{S_{۳}} = ۱+q^{۳} = \frac{۱۵۳}{۱۳۶} = \frac{۹}{۸} \Rightarrow q^{۳} = \frac{۱}{۸} \Rightarrow q = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \frac{a_{۱}}{a_{۵}} = \frac{۱}{q^{۴}} = \frac{۱}{(\frac{۱}{۲})^{۴}} = ۱۶$$

۳۰- $a_۳ = a_۱ q^۲ \Rightarrow \frac{۳}{۴} = ۳q^۲ \Rightarrow q^۲ = \frac{۱}{۴} \Rightarrow q = \pm\frac{۱}{۲} \xrightarrow{\text{غیر نزولی}} q = \frac{-۱}{۲}$

اگر $q = \frac{۱}{۲}$ گرفته شود، دنباله نزولی خواهد بود.

$$S_q = \frac{a}{۱-q} = \frac{۳}{۱+\frac{۱}{۲}} = ۲$$

۳۲-

$$\begin{cases} a + aq + aq^۲ + ... = \dfrac{a}{۱-q} = ۴ \\ a^۲ + a^۲q^۲ + a^۲q^۴ + ... = \dfrac{a^۲}{۱-q^۲} = ۱ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = ۴(۱-q) \\ a^۲ = ۱-q^۲ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^۲ = ۱۶(۱-q)^۲ \\ a^۲ = ۱-q^۲ \end{cases}$$

$$\Rightarrow ۱۶(۱-q)^۲ = ۱-q^۲ \Rightarrow ۱۶(۱-q) = ۱+q$$

$$\Rightarrow ۱۶ - ۱۶q = ۱+q \Rightarrow q = \frac{۱۵}{۱۷}$$

۳۵- دقت شود درگیر یک دنباله‌ی هندسی هستیم، ولی جمله‌ی اول چون توپ فقط پایین می‌آید باید از بقیه جدا شود (بقیه‌ی جملات رفت و برگشت را با هم دارند).

$\downarrow ۲ \quad \updownarrow ۱/۶ \quad \updownarrow ۱/۲۸ \quad \updownarrow ۱/۰۲۴$

$$۲ + ۱/۶ + ۱/۶ + ۱/۲۸ + ۱/۲۸ + ۱/۰۲۴ + ۱/۰۲۴ + ... = ۲ + ۲(۱/۶ + ۱/۲۸ + ...)$$

$$= ۲ + ۲(\frac{۱/۶}{۱-۰/۸}) = ۲ + ۱۶ = ۱۸$$

۳۷- اضلاع هر مثلث در مقایسه با مثلث قبلی نصف می‌گردد؛ یعنی قدر نسبت اضلاع برابر $\frac{۱}{۲}$ است. به عبارت دیگر نسبت تشابه برابر $\frac{۱}{۲}$ است. نسبت مساحت‌های دو مثلث متشابه با نسبت K، برابر $K^۲$ است. (چرا؟)

با یک تصاعد هندسی با قدر نسبت $q = \frac{۱}{۴}$ مواجه هستیم و جمله‌ی اول آن، مساحت مثلث اولی است که برابر $\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲$ است.

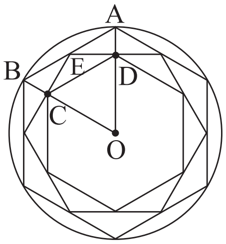
$$S_\infty = \frac{\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲}{۱-\frac{۱}{۴}} = \frac{\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲}{\frac{۳}{۴}} = \frac{\sqrt{۳}}{۳}a^۲$$

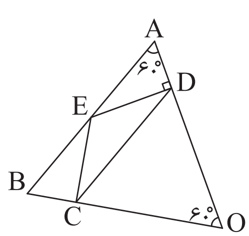
۳۸- در مثلث OAB داریم:

$$\frac{DC}{AB} = \frac{OD}{OA} \quad \text{و} \quad OD = OE.\cos ۳۰^\circ$$

با توجه به این‌که OE ارتفاع مثلث OAB است، پس برابر $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ است. لذا داریم:

$$\frac{DC}{AB} = (\frac{\sqrt{۳}}{۲})^۲$$





حال با توجه به این‌که CD مربوط به شش ضلعی سوم و AB مربوط به شش ضلعی اول است، نسبت اضلاع آن‌ها (با توجه به قدر نسبت دنباله‌ی هندسی q) برابر $q^۲$ است. پس $q=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ است.

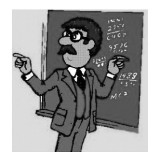
پس برای یافتن حد مجموع محیط‌ها داریم:

$$S_\infty=\frac{\text{محیط اولیه}}{۱-\text{(قدر نسبت)}}=\frac{۶}{۱-\frac{\sqrt{۳}}{۲}}$$

و برای یافتن حد مجموع مساحت‌ها با توجه به نکته‌ی گفته‌شده در سوال قبل برای q مساحت‌ها داریم:

$$S_\infty=\frac{۶(\frac{\sqrt{۳}}{۴})}{۱-(\frac{\sqrt{۳}}{۲})^۲}=\frac{\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}}{۱-\frac{۳}{۴}}=۶\sqrt{۳}$$

نکته:



به‌طور کلی هرگاه وسط‌های اضلاع یک n ضلعی منتظم را به هم وصل کنیم، n ضلعی‌هایی ایجاد می‌شوند که محیط‌ها و مساحت‌های آن با محیط‌ها و مساحت‌های n ضلعی اولیه دنباله‌ی هندسی نزولی تشکیل می‌دهند و قدر نسبت محیط‌های آن‌ها $\cos\frac{\pi}{n}$ و قدر نسبت مساحت‌های آن‌ها $\cos^۲\frac{\pi}{n}$ می‌باشد.

۴۱- اولاً:

$$S_۱=\pi R^۲ \qquad S_۲=۲(\frac{\pi R}{۲})^۲=\frac{\pi R^۲}{۲} \qquad S_۳=۴(\frac{\pi R}{۴})^۲=\frac{\pi R^۲}{۴}$$

$$S_\infty=\frac{\pi R^۲}{۱-\frac{۱}{۲}}=۲\pi R^۲$$

ثانیاً:

$$P_۱=۲\pi R \qquad P_۲=۲(\frac{۲\pi R}{۲})=۲\pi R \qquad P_۳=۴(\frac{۲\pi R}{۴})=۲\pi R$$

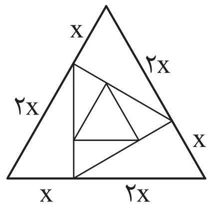
محیط‌ها کوچک نمی‌شوند که حد مجموع داشته باشند، ولی مساحت‌ها دنباله‌ی هندسی با قدر نسبت $\frac{۱}{۲}$ می‌باشند.

۴۲- مقدار رنگ‌شده در دفعات اول ، دوم و سوم به ترتیب °۶۰ ، °۳۰ و °۱۵ و ... خواهد بود.

$$۶۰^\circ+۳۰^\circ+۱۵^\circ+\ldots=\frac{۶۰}{۱-\frac{۱}{۲}}=۱۲۰^\circ$$

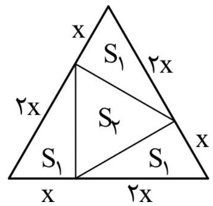
در نهایت $\frac{۲}{۳}=\frac{۱۲۰^\circ}{۱۸۰^\circ}$ محیط دایره رنگی می‌شود.

۴۳-



$$S_1=\frac{1}{2}(x)(2x)\sin 60^\circ \qquad S=\frac{1}{2}(3x)(3x)\sin 60^\circ$$

$$\frac{S_1}{S}=\frac{2x^2}{9x^2}=\frac{2}{9}\Rightarrow \frac{S_2}{S}=1-3(\frac{2}{9})=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}\Rightarrow q=\frac{1}{3}$$



$$\text{مجموع مساحت‌ها}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{4}(3x)^2}{1-\frac{1}{3}}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{4}(9x^2)}{\frac{2}{3}}=\frac{27\sqrt{3}x^2}{8}$$

۴۵-

$$2/3131\ldots=2+0/31+0/0031+\ldots=2+\frac{0/31}{1-\frac{1}{100}}=2+\frac{\frac{31}{100}}{\frac{99}{100}}=2+\frac{31}{99}=\frac{229}{99}$$

$$0/123123\ldots=0/123+0/000123+\ldots=\frac{0/123}{1-\frac{1}{1000}}=\frac{\frac{123}{1000}}{\frac{999}{1000}}=\frac{123}{999}=\frac{41}{333}$$

$$-0/4242\ldots=-(0/42+0/0042+\ldots)=-(\frac{0/42}{1-\frac{1}{100}})=-\frac{42}{99}=\frac{-14}{33}$$

۴۶-

$$P(x)=2x^3+bx^2+cx+d$$

$$P(0)=2(0)^3+b(0)^2+c(0)+d=2 \quad\rightarrow\quad d=2$$

$$\left.\begin{array}{l}P(1)=2(1)^3+b(1)^2+c(1)+2=3 \ \rightarrow\ b+c=-1\\ P(-1)=2(-1)^3+b(-1)^2+c(-1)+2=1 \ \rightarrow\ b-c=1\end{array}\right\}\Rightarrow \begin{cases}b+c=-1\\ b-c=1\end{cases}\Rightarrow b=0\ ,\ c=-1$$

$$P(x)=2x^3-x+2$$

۴۸- چون ۲- یک ریشه‌ی معادله است پس در آن صدق می‌کند.

$$x^3+ax^2+3=0\xrightarrow{x=-2}(-2)^3+a(-2)^2+3=0\rightarrow -8+4a+3=0\rightarrow a=\frac{5}{4}$$

حال باید $x^۳+\frac{۵}{۴}x^۲+۳$ بر $x+۲$ بخش‌پذیر باشد. پس:

$$\begin{array}{l|l} x^۳+\frac{۵}{۴}x^۲+۳ & x+۲ \\ \cline{2-2} \underline{-x^۳\pm ۲x^۲} & x^۲-\frac{۳}{۴}x+\frac{۳}{۲} \\ -\frac{۳}{۴}x^۲+۳ & \\ \underline{\mp\frac{۳}{۴}x^۲\mp\frac{۳}{۲}x} & \\ \frac{۳}{۲}x+۳ & \\ \underline{-\frac{۳}{۲}x\pm ۳} & \\ ۰ & \end{array}$$

بنابراین برای یافتن سایر ریشه‌ها داریم:

$$x^۲-\frac{۳}{۴}x+\frac{۳}{۲}=۰\Rightarrow \Delta<۰\Rightarrow$$

در نتیجه، معادله ریشه‌ی دیگری ندارد.

-۵۰

$$x^۲+۱=۰\Rightarrow x^۲=-۱\Rightarrow P(x^۲=-۱)=x^۴+۱=(x^۲)^۲+۱=(-۱)^۲+۱=۲$$

-۵۱

$$x^۳+۱=۰\Rightarrow x^۳=-۱\Rightarrow P(x^۳=-۱)=x^۶-۲x^۳+x^۲-x+۱=(x^۳)^۲-۲(x^۳)+x^۲-x+۱$$
$$=(-۱)^۲-۲(-۱)+x^۲-x+۱=x^۲-x+۴$$

-۵۲

$$\begin{matrix} x+۱=۰\Rightarrow x=-۱\Rightarrow P(-۱)=۵ \\ x-۱=۰\Rightarrow x=۱\Rightarrow P(۱)=۳ \end{matrix}\Rightarrow\begin{cases}(-۱)^۴+(-۱)^۳+m(-۱)+n=۵\\ ۱^۴+۱^۳+m(۱)+n=۳\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-m+n=۵\\ m+n=۱\end{cases}$$
$$\Rightarrow\begin{cases}m=-۲\\ n=۳\end{cases}$$

$$x^۲-x=۰\Rightarrow x^۲=x\Rightarrow P(x^۲=x)=x^۴+x^۳-۲x+۳=(x^۲)^۲+x(x^۲)-۲x+۳$$
$$=(x^۲)+x(x)-۲x+۳=۲x^۲-۲x+۳=۲x-۲x+۳=۳$$

۵۶- هرگاه عبارتی بر $Q(x)$ بخش‌پذیر باشد آن عبارت بر عامل‌های تجزیه‌شده‌ی $Q(x)$ نیز بخش‌پذیر است. بنابراین:

$$x^2-1=0 \Rightarrow (x-1)(x+1)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} P(-1)=0 \\ P(+1)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (-1)^3+(-1)^2+a(-1)+b=0 \\ (1)^3+(1)^2+a(1)+b=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -a+b=0 \\ a+b=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=-1 \\ a=-1 \end{cases}$$

۵۷-

$$x^2+x+1=0 \Rightarrow (x-1)(x^2+x+1)=(x-1)\times 0 \Rightarrow x^3-1=0 \Rightarrow x^3=1$$

$$P(x)=x^{26} \Rightarrow P(x^3=1)=(x^3)^8.x^2=(1)^8.x^2=x^2$$

از طرفی چون عبارت بر x^2+x+1 تقسیم می‌شود درجه‌ی باقی‌مانده باید لااقل یک درجه کوچک‌تر از آن باشد و می‌دانیم.

$$x^2+x+1=0 \Rightarrow x^2=-x-1$$

$$P(x^3=1)=x^2=-x-1$$

۵۸-

$$x-1=0 \Rightarrow x=1 \Rightarrow P(1)=1$$

$$x+2=0 \Rightarrow x=-2 \Rightarrow P(-2)=4$$

$$P(x)=(x^2+x-2)Q(x)+ax+b \Rightarrow P(x)=(x-1)(x+2)Q(x)+ax+b$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=1 \Rightarrow P(1)=0+a(1)+b=1 \\ x=-2 \Rightarrow P(-2)=0+a(-2)+b=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b=1 \\ -2a+b=4 \end{cases} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} a=-1 \\ b=2 \end{array} \right.$$

۶۰-

$$P(x)=(x^2+x+1)Q(x)+x+1$$

$$R(x)=(x^2+x+1)Q'(x)+x+2$$

$$P(x).R(x)=(x^2+x+1)^2Q(x).Q'(x)+(x^2+x+1)Q(x)(x+2)+(x^2+x+1)Q'(x)(x+1)$$
$$+(x+1)(x+2)$$

چون باقی‌مانده‌ی $P(x).R(x)$ را بر x^2+x+1 می‌خواهیم. لذا :

$$x^2+x+1=0 \Rightarrow x^2=-x-1$$

$$P.R(x^2=-x-1)=0+0+0+(x+1)(x+2)$$

$$P.R(x^2=-x-1)=x^2+3x+2=(-x-1)+3x+2=2x+1$$

۶۳- از آن‌جایی‌که باقی‌مانده‌ی تقسیم بر $x^{۲}-۱۰x+۹$ باید عبارتی حداکثر درجه‌ی یک $(ax+b)$ باشد داریم:

$$P(x)=(x^{۲}-۱۰x+۹)Q(x)+(ax+b)\Rightarrow P(x)=(x-۱)(x-۹)Q(x)+ax+b$$

$$\Rightarrow\begin{cases}P(۱)=۰+a(۱)+b\\P(۹)=۰+a(۹)+b\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}P(۱)=(۱)^{۱۰۰}-۹(۱)^{۹۹}+۲(۱)+۱=-۵\\P(۹)=۹^{۱۰۰}-۹(۹)^{۹۹}+۲(۹)+۱=۱۹\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}-۵=a+b\\۱۹=۹a+b\end{cases}\Rightarrow ۸a=۲۴\Rightarrow a=۳\Rightarrow b=-۸\Rightarrow R(x)=۳x-۸$$

۶۵-

الف) $$\frac{x^{۶}-۱}{x^{۴}-۱}=\frac{\cancel{(x-۱)}(x^{۵}+x^{۴}+x^{۳}+x^{۲}+x+۱)}{\cancel{(x-۱)}(x^{۳}+x^{۲}+x+۱)}=\frac{x^{۵}+x^{۴}+x^{۳}+x^{۲}+x+۱}{x^{۳}+x^{۲}+x+۱}$$

۶۶-

$$(x^{۲}+y)^{۶}=(x^{۲})^{۶}+۶(x^{۲})^{۵}(y)+۱۵(x^{۲})^{۴}y^{۲}+۲۰(x^{۲})^{۳}y^{۳}+۱۵(x^{۲})^{۲}y^{۴}+۶(x^{۲})y^{۵}+y^{۶}$$

$$(x^{۲}+y)^{۶}=x^{۱۲}+۶x^{۱۰}y+۱۵x^{۸}y^{۲}+۲۰x^{۶}y^{۳}+۱۵x^{۴}y^{۴}+۶x^{۲}y^{۵}+y^{۶}$$

۶۷- الف) تعداد جملات این بسط برابر $(۱+۸)$ یعنی ۹ می‌باشد.

ب) برای یافتن مجموع ضرایب داریم: $\Leftarrow \quad x=y=۱ \quad \Leftarrow \quad (x+۲y)^{۸}=(۱+۲)^{۸}=۳^{۸}$

پ) جمله‌ی $(K+۱)$اُم بسط $(a+b)^{n}$ عبارت است از: $\binom{n}{K}a^{n-K}\times b^{K}$

پس جمله‌ی پنجم بسط $(x+۲y)^{۸}$ خواهد بود:

$$\binom{۸}{۴}(x)^{۸-۴}(۲y)^{۴}=\binom{۸}{۴}x^{۴}\times ۲^{۴}y^{۴}=\frac{۸!}{۴!\times ۴!}\times ۱۶x^{۴}y^{۴}=۱۱۲۰\,x^{۴}y^{۴}$$

۷۰- جمله‌ی سوم : $\binom{۵}{۲}a^{۳}\,b^{۲}=۷۲۰\Rightarrow ۱۰\,a^{۳}\,b^{۲}=۷۲۰\Rightarrow a^{۳}\,b^{۲}=۷۲\Rightarrow ۲^{۳}\times ۳^{۲}=۷۲$

$$\Rightarrow\begin{cases}a=۲\\b=۳\end{cases}\Rightarrow a+b=۵$$

۷۱-
$$(x+\frac{1}{\sqrt{x}})^4 = x^4 + 4x^3(\frac{1}{\sqrt{x}}) + 6x^2(\frac{1}{\sqrt{x}})^2 + 4x(\frac{1}{\sqrt{x}})^3 + (\frac{1}{\sqrt{x}})^4$$
$$(x+\frac{1}{\sqrt{x}})^4 = x^4 + 4x^2\sqrt{x} + 6x + \frac{4}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2}$$

جمله‌ی دوم بسط برابر است با: $4x^2\sqrt{x}$

۷۲- در بسط خیام – پاسکال، ضریب جملات متساوی‌الفاصله از طرفین با هم برابرند. یعنی اگر جمله‌های m اُم و k اُم ضرایب یکسانی در بسط $(a+b)^n$ داشته باشند، داریم: $k+m=n+2$

پس در این سوال داریم: $9+20=n+2 \Rightarrow n=27$

با توجه به این‌که توان ۲۷است. پس ۲۸جمله داریم و دو جمله‌ی وسط، یعنی جملات شماره‌های ۱۴ و ۱۵ دارای ضرایب برابر بوده و بزرگ‌ترین ضرایب بسط را تشکیل می‌دهند.

حال برای یافتن این ضریب یعنی جمله‌ی چهاردهم داریم: $\binom{27}{13}=$ ضریب

۷۳- **روش اول:**

$$(x^3+\frac{1}{x})^8 = (x^3)^8 + 8(x^3)^7(\frac{1}{x}) + 28(x^3)^6(\frac{1}{x})^2 + 56(x^3)^5(\frac{1}{x})^3 + 70(x^3)^4(\frac{1}{x})^4$$
$$+56(x^3)^3(\frac{1}{x})^5 + 28(x^3)^2(\frac{1}{x})^6 + 8(x^3)(\frac{1}{x})^7 + (\frac{1}{x})^8$$

که پس از ساده کردن داریم:

$$(x^3+\frac{1}{x})^8 = x^{24} + 8x^{20} + 28x^{16} + 56x^{12} + 70x^8 + 56x^4 + 28 + \frac{8}{x^4} + \frac{1}{x^8}$$

بنابراین جمله‌ی مستقل از x یعنی جمله‌ی فاقد x ، جمله‌ی شماره‌ی هفتم می‌باشد.

روش دوم:

برای این‌که جمله‌ای مستقل از x شود، باید توان x در آن جمله برابر صفر باشد.

جمله‌ی $(K+1)$ اُم بسط مورد نظر به صورت زیر است.

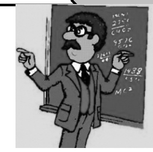
$$\binom{8}{K}(x^3)^{8-K}\times(x^{-1})^K = \binom{8}{K}x^{24-3K}\times x^{-K} = \binom{8}{K}x^{24-4K}$$

حال کافی است توان x را برابر صفر قرار دهیم.

$24-4K=0 \Rightarrow K=6 \Rightarrow$ شماره‌ی جمله $= K+1 = 6+1 = 7$

بنابراین جمله‌ی هفتم مستقل از x است.

نکته:



در بسط $(x^p \pm x^q)^n$ شماره‌ی جمله‌ی مستقل از x را می‌توان از فرمول مقابل یافت:

$$\frac{P\times n}{p-q}+1$$

۷۶- **روش اول:**

$$(x^۳+x)^{۱۲}=(x^۳)^{۱۲}+۱۲(x^۳)^{۱۱}.x+۶۶(x^۳)^{۱۰}x^۲+۲۲۰(x^۳)^۹.x^۳+۴۹۵(x^۳)^۸x^۴$$
$$+۷۹۲(x^۳)^۷x^۵+۹۲۴(x^۳)^۶x^۶+۷۹۲(x^۳)^۵x^۷+۴۹۵(x^۳)^۴x^۸$$
$$+۲۲۰(x^۳)^۳x^۹+۶۶(x^۳)^۲x^{۱۰}+۱۲(x^۳)x^{۱۱}+x^{۱۲}$$

بنابراین داریم:

$$(x^۳+x)^{۱۲}=x^{۳۶}+۱۲x^{۳۴}+۶۶x^{۳۲}+۲۲۰x^{۳۰}+۴۹۵x^{۲۸}+۷۹۲x^{۲۶}+۹۲۴x^{۲۴}+۷۹۲x^{۲۲}$$
$$+۴۹۵x^{۲۰}+۲۲۰x^{۱۸}+۶۶x^{۱۶}+۱۲x^{۱۴}+x^{۱۲}$$

بنابراین جمله‌ی شامل $x^{۳۰}$ جمله‌ی چهارم بسط را تشکیل می‌دهد.

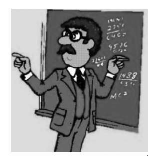
روش دوم:

جمله‌ی $(K+۱)$اُم بسط را نوشته و توان x را برابر ۳۰ قرار می‌دهیم.

$$\binom{۱۲}{K}(x^۳)^{۱۲-K}(x)^K=\binom{۱۲}{K}x^{۳۶-۲K}$$

$۳۶-۲K=۳۰ \Rightarrow K=۳ \Rightarrow$ شماره‌ی جمله $=K+۱=۳+۱=۴$

نکته:

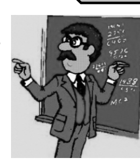


برای یافتن شماره‌ی جمله‌ی شامل x^h در بسط $(x^p \pm x^q)^n$ می‌توان از فرمول:

$$\text{شماره‌ی جمله}=\frac{P\times n-h}{p-q}+۱$$

به‌طور مثال در این سوال جمله‌ی شامل $x^{۳۰}$ عبارت است از: $\frac{۳\times۱۲-۳۰}{۳-۱}+۱=\frac{۶}{۲}+۱=۴$

نکته:



در بسط $(x+y)^n$ می‌توان برای یافتن جمله‌ی $(K+۱)$اُم بسط از فرمول:

$\binom{n}{K}(x)^{n-K}(y)^K$ **استفاده کرد.**

به‌طور مثال برای یافتن جمله‌ی سوم بسط $(x^۳+x)^{۱۲}$ می‌توان نوشت: $\binom{۱۲}{۲}(x^۳)^{۱۰}(x)^۲=۶۶x^{۳۲}$

۷۸- الف)

۱۲۵۰۰۰	۲
	۵
	۲
	۵
	۲
	۵
۱۲۵	۵
۲۵	۵
۵	۵
۱	

$$۱۲۵۰۰۰=۲^۳\times۵^۶$$

۸۰-

$$۱۴,۲۱,۵۶ \Rightarrow ۲\times۷,۳\times۷,۲^{۳}\times۷ \Rightarrow \begin{cases} \text{ب. م. م.} = ۷ \\ \text{ک. م. م.} = ۲^{۳}\times۳\times۷=۱۶۸ \end{cases}$$

۸۲- پس از آخرین باری که هر سه ماشین با هم و در یک دقیقه از این جاده عبور کنند؛ مدت زمانی که طول می‌کشد تا دوباره این اتفاق بیافتد ک. م. م. زمان‌های عبور آن‌ها است.

$$[۵,۷۵,۱۴۴]=[۵,۳\times۵^{۲},۲^{۴}\times۳^{۲}]=۲^{۴}\times۳^{۲}\times۵^{۲}=۳۶۰۰$$

یعنی پس از ۳۶۰۰ دقیقه یا ۶۰ ساعت این سه ماشین مجدداً در یک دقیقه از جاده عبور می‌کنند.

۸۴-

الف) $\begin{cases} \text{ب. م. م.} = xy \\ \text{ک. م. م.} = ۹x^{۴}y^{۴}z \end{cases}$

ب) $\begin{cases} \text{ب. م. م.} = (x+۱) \\ \text{ک. م. م.} = ۳\times۵\times(x+۱)^{۲}(x-۱)^{۲} \end{cases}$

ث) $(x-۳)^{۲},(x-۳)(x+۳),(x-۳)(x+۲) \Rightarrow \begin{cases} \text{ب. م. م.} = (x-۳) \\ \text{ک. م. م.} = (x-۳)^{۲}(x+۳)(x+۲) \end{cases}$

ج) $x(x+y),x(x+y)^{۲} \Rightarrow \begin{cases} \text{ب. م. م.} = x(x+y) \\ \text{ک. م. م.} = x(x+y)^{۲} \end{cases}$

چ) $x^{۲}(x+۲)^{۲},x(x-۲)(x+۲) \Rightarrow \begin{cases} \text{ب. م. م.} = x(x+۲) \\ \text{ک. م. م.} = x^{۲}(x+۲)^{۲}(x-۲) \end{cases}$

۸۷- **روش اول:**

طرفین رابطه را در $x^{۲}-۱$ که ک. م. م. مشترک مخرج‌ها است، ضرب می‌کنیم.

$$(\frac{A}{x-۱}+\frac{B}{x+۱})\times(x^{۲}-۱)=(\frac{۵x-۱}{x^{۲}-۱})\times(x^{۲}-۱) \Rightarrow A(x+۱)+B(x-۱)=۵x-۱$$

$$\Rightarrow Ax+A+Bx-B=۵x-۱$$

$$\Rightarrow (A+B)x+(A-B)=۵x-۱ \Rightarrow \begin{cases} A+B=۵ \\ A-B=-۱ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A=۲ \\ B=۳ \end{cases}$$

روش دوم:

کافی است به x دو عدد دلخواه بدهیم تا دو معادله با کمک A و B تشکیل شود و با حل دستگاه A و B پیدا می‌شوند.

-۱۰۷

$$\begin{array}{l} S=(a+\sqrt{a})+(a-\sqrt{a})=2a \\ P=(a+\sqrt{a})(a-\sqrt{a})=a^2-a \end{array} \Rightarrow x^2-Sx+P=0 \Rightarrow x^2-2ax+a^2-a=0$$

-۱۱۱

$$ax^4+bx^2+c=0 \Rightarrow \begin{cases} \Delta<0 \text{ .معادله ریشه ندارد} \\ \Delta>0 \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{c}{a}>0 \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{-b}{a}>0 \rightarrow \text{ .معادله چهار ریشه دارد} \\ \dfrac{-b}{a}<0 \rightarrow \text{ .معادله ریشه ندارد} \end{cases} \\ \dfrac{c}{a}<0 \rightarrow \text{ .معادله دو ریشه دارد} \end{cases} \end{cases}$$

-۱۱۳ ۱) چون دهانه‌ی سهمی رو به پایین است، پس ضریب x^2 منفی است و چون منحنی محور xها را در طول‌های منفی قطع نموده است، پس دو ریشه منفی‌اند؛ یعنی ضرب آن‌ها مثبت $(\frac{c}{a}>0)$ و جمع آن‌ها منفی است $(\frac{-b}{a}<0)$ ، پس b و c نیز منفی خواهند بود.

۲) چون دهانه‌ی سهمی رو به بالا است، پس ضریب x^2 مثبت است $(a>0)$ و از طرفی چون منحنی بر محور طول‌ها مماس شده است، پس یک ریشه‌ی مضاعف مثبت دارد $(-\frac{b}{2a}>0)$، پس b منفی می‌باشد. از طرفی چون منحنی محور عرض‌ها را در قسمت مثبت‌ها قطع نموده است؛ پس عرض از مبداء تابع، یعنی c نیز مقداری مثبت می‌گردد.

-۱۱۴

$$\begin{cases} f(0)=1 \Rightarrow (0)^2+m(0)+c=1 \Rightarrow c=1 \\ \text{.منحنی بر محور طول‌ها مماس است} \Rightarrow \text{ .معادله ریشه‌ی مضاعف دارد} \Rightarrow \Delta=0 \Rightarrow b^2-4ac=0 \\ \qquad \Rightarrow m^2-4(1)(1)=0 \Rightarrow m=\pm 2 \end{cases}$$

از آن‌جایی که ریشه مثبت است. پس $-\frac{b}{2a}>0$ ، یعنی $-\frac{b}{2}>0$ ، یعنی $b<0$ است. پس $m<0$ است.

لذا $m=-2$

-۱۱۹

$$x' = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{۲a} \quad و \quad x'' = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{۲a}$$

$$|x'-x''| = \left|\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{۲a} - \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{۲a}\right| = \left|\frac{۲\sqrt{\Delta}}{۲a}\right| = \left|\frac{\sqrt{\Delta}}{a}\right| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$$

-۱۲۰

$$\alpha, K\alpha$$

$$\begin{cases} S = \alpha + K\alpha = -\frac{b}{a} \Rightarrow (K+۱)\alpha = -\frac{b}{a} \Rightarrow \alpha = \frac{-b}{a(K+۱)} \\ P = \alpha(K\alpha) = \frac{c}{a} \Rightarrow K\alpha^۲ = \frac{c}{a} \Rightarrow \alpha^۲ = \frac{c}{Ka} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{-b}{a(K+۱)}\right)^۲ = \frac{c}{Ka} \Rightarrow \frac{b^۲}{a^۲(K+۱)^۲} = \frac{c}{Ka} \Rightarrow \frac{K}{(K+۱)^۲} = \frac{ca}{b^۲}$$

-۱۲۲

$$S = \frac{-b}{a} = \frac{-(-۴)}{۱} = ۴$$

$$P = \frac{c}{a} = \frac{۱}{۱} = ۱$$

$$A = |\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta}| \Rightarrow A^۲ = |\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta}|^۲ = \alpha + \beta - ۲\sqrt{\alpha\beta} = S - ۲\sqrt{P} = ۴ - ۲\sqrt{۱} = ۲ \Rightarrow A = \pm\sqrt{۲}$$

چون A باید مثبت باشد. پس $A = \sqrt{۲}$ است.

-۱۲۳

$$S = -\frac{b}{a} = \frac{-(-۹m^۲)}{۱} = ۹m^۲$$

$$P = \frac{c}{a} = \frac{۸}{۱} = ۸$$

$$\sqrt[۳]{\alpha} + \sqrt[۳]{\beta} = ۳ \Rightarrow (\sqrt[۳]{\alpha} + \sqrt[۳]{\beta})^۳ = ۳^۳ \Rightarrow \alpha + \beta + ۳\sqrt[۳]{\alpha^۲\beta} + ۳\sqrt[۳]{\alpha\beta^۲} = ۲۷$$

$$\Rightarrow \alpha + \beta + ۳\sqrt[۳]{\alpha\beta}\,(\underbrace{\sqrt[۳]{\alpha} + \sqrt[۳]{\beta}}_{۳}) = ۲۷ \Rightarrow S + ۳\sqrt[۳]{P}(۳) = ۲۷ \Rightarrow ۹m^۲ + ۳\sqrt[۳]{۸}(۳) = ۲۷$$

$$\Rightarrow ۹m^۲ = ۹ \Rightarrow m^۲ = ۱ \Rightarrow m^۴ = ۱ \Rightarrow m^۴ + ۱ = ۲$$

-۱۲۵

$$S = \frac{-b}{a} = ۳$$

$$P = \frac{c}{a} = ۲m$$

$$۳\alpha + ۲\beta = ۷ \Rightarrow \alpha + ۲\alpha + ۲\beta = ۷ \Rightarrow \alpha + ۲(\alpha + \beta) = ۷ \Rightarrow \alpha + ۲S = ۷ \Rightarrow \alpha + ۲(۳) = ۷$$

$$\Rightarrow \alpha = ۱ \Rightarrow ۳(۱) + ۲\beta = ۷ \Rightarrow \beta = ۲$$

$$P = \alpha\beta \Rightarrow ۲m = ۱(۲) \Rightarrow m = ۱$$

-۱۲۷ $\beta=\alpha^2 \Rightarrow P=\alpha\beta=\alpha(\alpha^2)=\alpha^3$ و $P=\frac{c}{a}=8\Rightarrow \alpha^3=8\Rightarrow \alpha=2$

$x=2\Rightarrow 4-12m+8=0\Rightarrow m=1$

-۱۲۹ $X=\frac{2}{\alpha_{\text{ریشه‌ی قدیم}}}-1\Rightarrow \frac{2}{\alpha}=X+1\Rightarrow \alpha_{\text{ریشه‌ی قدیم}}=\frac{2}{X+1}$ ریشه‌ی جدید

چون α در معادله صادق است پس به‌جای آن $\frac{2}{X+1}$ را جای‌گذاری می‌کنیم.

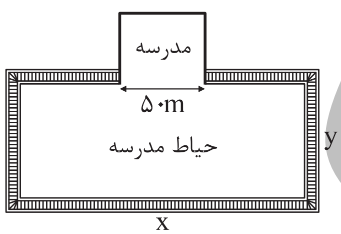
$$3x^2-x-1=0\Rightarrow 3\left(\frac{2}{X+1}\right)^2-\left(\frac{2}{X+1}\right)-1=0\Rightarrow$$

طرفین را در $(X+1)^2$ ضرب می‌کنیم:

$$3(2)^2-2(X+1)-(X+1)^2=0\Rightarrow 12-2X-2-X^2-2X-1=0$$

معادله‌ی جدید: $\Rightarrow -X^2-4X+9=0\Rightarrow X^2+4X-9=0$

-۱۳۰ $x+(x-50)+2y=170$



$$2x+2y=220\Rightarrow x+y=110$$

$$\begin{cases}x+y=110\\ xy=2800\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=110-x\\ xy=2800\end{cases}$$

$$x(110-x)=2800\Rightarrow 110x-x^2=2800\Rightarrow x^2-110x+2800=0$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=40\Rightarrow y=70 & \text{غ. ق. ق}\\ x=70\Rightarrow y=40\end{cases}$$

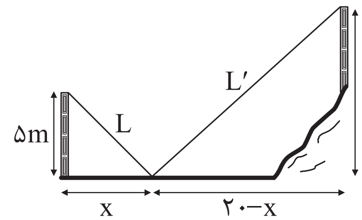
-۱۳۲ ۳) $f(x)=ax^2+bx+c$

$$\begin{cases}f(-1)=a(-1)^2+b(-1)+c=0\\ f(3)=a(3)^2+b(3)+c=0\\ f(0)=a(0)^2+b(0)+c=-2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a-b+c=0\\ 9a+3b+c=0\\ c=-2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a-b=2\\ 9a+3b=2\end{cases}$$

$$12a=8\Rightarrow a=\frac{2}{3}\Rightarrow b=-\frac{4}{3}$$

پس معادله‌ی $f(x)$ به صورت مقابل درمی‌آید. $f(x)=\frac{2}{3}x^2-\frac{4}{3}x-2$

-۱۳۳



$$L^{۲} = ۵^{۲} + x^{۲}$$

$$L'^{۲} = ۱۰^{۲} + (۲۰ - x)^{۲}$$

$$L^{۲} + L'^{۲} = ۲۵ + x^{۲} + ۱۰۰ + ۴۰۰ - ۴۰x + x^{۲}$$

$$= ۲x^{۲} - ۴۰x + ۵۲۵ \Rightarrow X_{min} = -\frac{b}{۲a} = -\frac{-۴۰}{۲(۲)} = ۱۰$$

پس به ازای $x = ۱۰$ مجموع مربعات طول سیم‌ها تا زمین، کم‌ترین می‌گردد.

۱۳۴- با توجه به این‌که $\tan x = \frac{۱}{\cot x}$ و با فرض این‌که $\tan x = A$ باشد. داریم:

$$f(x) = \tan x + \frac{۴}{\tan x} \Rightarrow f(x) = A + \frac{۴}{A} \Rightarrow y = A + \frac{۴}{A} \Rightarrow y = \frac{A^{۲} + ۴}{A} \Rightarrow A^{۲} - yA + ۴ = ۰$$

$$A_{min} = -\frac{b}{۲a} = -\frac{-y}{۲} = \frac{y}{۲}$$

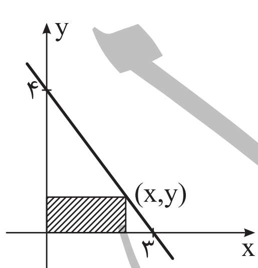
با جای‌گذاری $\frac{y}{۲}$ به‌جای A در اصل معادله داریم:

$$A^{۲} - yA + ۴ = ۰ \Rightarrow (\frac{y}{۲})^{۲} - y(\frac{y}{۲}) + ۴ = ۰ \Rightarrow \frac{y^{۲}}{۴} - \frac{y^{۲}}{۲} + ۴ = ۰ \Rightarrow y^{۲} = ۱۶ \Rightarrow y = \pm ۴$$

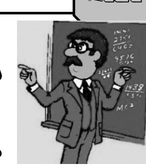
با توجه به این‌که x در ناحیه‌ی اول مثلثاتی قرار دارد، در نتیجه A مثبت بوده و y نیز مثبت خواهد بود. بنابراین جواب $y = ۴$ قابل قبول است.

۱۳۶- برای حل این سوال فرض می‌کنیم اضلاع مثلث قائم‌الزاویه محورهای مختصات می‌باشند و وتر خطی است مایل که از نقاط $(۰,۴)$ و $(۳,۰)$ می‌گذرد.

معادله‌ی خط عبارت است از: $\frac{x}{۳} + \frac{y}{۴} = ۱$ یعنی: $y = ۴ - \frac{۴x}{۳}$



نکته:



به‌طور کلی خطی که طول از مبداء p و عرض از مبداء q دارد معادله‌ای برابر $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = ۱$ دارد.

از طرفی مساحت مستطیل عبارت است از:

$$S = xy = x(۴ - \frac{۴x}{۳}) = ۴x - \frac{۴x^{۲}}{۳} \Rightarrow x_{max} = -\frac{b}{۲a} = -\frac{۴}{۲(-\frac{۴}{۳})} = \frac{۳}{۲} \Rightarrow S_{max} = \frac{۳}{۲}(۴ - \frac{۴(\frac{۳}{۲})}{۳}) = \frac{۳}{۲} \times ۲ = ۳$$

-۱۳۷

$$S=\frac{-b}{a}=\frac{-۱}{۱}=-۱$$

$$P=\frac{c}{a}=\frac{-۳}{۱}=-۳$$

ب) $\frac{\alpha^۲}{\beta}+\frac{\beta^۲}{\alpha}=\frac{\alpha^۳+\beta^۳}{\alpha\beta}=\frac{(\alpha+\beta)^۳-۳\alpha\beta(\alpha+\beta)}{\alpha\beta}=\frac{S^۳-۳PS}{P}=\frac{(-۱)^۳-۳(-۳)(-۱)}{-۳}=-\frac{۱۰}{۳}$

پ) $\alpha^۳+\alpha^۲+۳\beta=\alpha\underbrace{(\alpha^۲+\alpha)}_{۳}+۳\beta=\alpha(۳)+۳\beta=۳(\alpha+\beta)=۳S=۳(-۱)=-۳$

$$x=\alpha\Rightarrow\alpha^۲+\alpha-۳=۰\Rightarrow\alpha^۲+\alpha=۳$$

ت) $\frac{\alpha^۲+\alpha}{\beta^۲+\beta}+\frac{۱}{\alpha}+\frac{۱}{\beta}=\frac{\alpha^۲+\alpha}{\beta^۲+\beta}+\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{۳}{۳}+\frac{-۱}{-۳}=\frac{۴}{۳}$

$$x=\alpha\Rightarrow\alpha^۲+\alpha-۳=۰\Rightarrow\alpha^۲+\alpha=۳$$
$$x=\beta\Rightarrow\beta^۲+\beta-۳=۰\Rightarrow\beta^۲+\beta=۳$$

۱۳۸- کافی است به جای x در معادله مقدار $\frac{۱}{x}$ را جای‌گذاری کنیم:

$$x^۴+۲x^۳-۵x^۲-\frac{۱}{۲}x-۱۱=۰\xrightarrow{x\to\frac{۱}{x}}(\frac{۱}{x})^۴+۲(\frac{۱}{x})^۳-۵(\frac{۱}{x})^۲-\frac{۱}{۲}(\frac{۱}{x})-۱۱=۰$$

طرفین را در $x^۴$ ضرب می‌کنیم: $۱+۲x-۵x^۲-\frac{۱}{۲}x^۳-۱۱x^۴=۰$

این معادله ریشه‌هایی معکوس ریشه‌های معادله‌ی اولیه دارد.

-۱۳۹

$$x=\sqrt{\sqrt{۲}+۱}\Rightarrow x^۲=\sqrt{۲}+۱\Rightarrow x^۲-۱=\sqrt{۲}\Rightarrow(x^۲-۱)^۲=(\sqrt{۲})^۲$$
$$\Rightarrow x^۴-۲x^۲+۱=۲\Rightarrow x^۴-۲x^۲-۱=۰$$

-۱۴۲

$$(x+\frac{۱}{x})^۲-۳(x+\frac{۱}{x})+۱=۰\Rightarrow x+\frac{۱}{x}=A$$

$$A^۲-۳A+۱=۰\Rightarrow\begin{cases}A=\frac{۳+\sqrt{۵}}{۲}\simeq ۲/۶\\ A'=\frac{۳-\sqrt{۵}}{۲}\simeq ۰/۸\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x+\frac{۱}{x}=۲/۶\\ x+\frac{۱}{x}=۰/۸\end{cases}$$

از آن‌جایی که مجموع هر عدد با معکوسش بزرگ‌تر، مساوی ۲ یا کوچک‌تر، مساوی ۲- می‌گردد، لذا امکان ندارد که $x+\frac{۱}{x}=۰/۸$ ، پس فقط داریم:

$x+\frac{۱}{x}=۲/۶\Rightarrow x^۲-۲/۶x+۱=۰\Rightarrow\Delta>۰\to$ ۲ ریشه دارد.

-۱۴۳

$$x^2-2x=t \Rightarrow t^2-3t+2=0 \Rightarrow \begin{cases} t=1 \Rightarrow x^2-2x=1 \Rightarrow x^2-2x-1=0 \Rightarrow x=1\pm\sqrt{2} \\ t=2 \Rightarrow x^2-2x=2 \Rightarrow x^2-2x-2=0 \Rightarrow x=1\pm\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow$$ ۴ ریشه

-۱۴۴

$$2^x=A>0 \Rightarrow 2^{-x}=A^{-1}=\frac{1}{A} \Rightarrow (A+\frac{1}{A})^2=\frac{25}{4} \Rightarrow A+\frac{1}{A}=\pm\frac{5}{2}$$

چون A و $\frac{1}{A}$ مثبت هستند لذا $-\frac{5}{2}$ غیرقابل قبول است.

$$A+\frac{1}{A}=\frac{5}{2} \Rightarrow 2A^2-5A+2=0 \Rightarrow \begin{cases} A=2 \Rightarrow 2^x=2 \Rightarrow x=1 \\ A=\frac{1}{2} \Rightarrow 2^x=\frac{1}{2}=2^{-1} \Rightarrow x=-1 \end{cases}$$

-۱۴۵

پ) $$\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}=\frac{x+2}{x} \Rightarrow \frac{x-1+x}{\cancel{x}(x-1)}=\frac{x+2}{\cancel{x}} \Rightarrow \frac{2x-1}{x-1}=x+2 \Rightarrow 2x-1=(x-1)(x+2)$$

$$\Rightarrow 2x-1=x^2+x-2 \Rightarrow x^2-x-1=0 \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ x=\frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

هیچ‌کدام مخرج‌ها را صفر نمی‌کنند. پس هر دو قابل قبول هستند.

خ) $$\frac{x}{x-3}-\frac{1}{2x-1}=\frac{5x}{2x^2-7x+3} \Rightarrow \frac{2x^2-x-(x-3)}{(x-3)(2x-1)}=\frac{5x}{2x^2-7x+3}$$

$$\Rightarrow \frac{2x^2-2x+3}{\cancel{2x^2-7x+3}}=\frac{5x}{\cancel{2x^2-7x+3}} \Rightarrow 2x-2x+3=5x$$

$$\Rightarrow 2x^2-7x+3=0 \Rightarrow \begin{cases} x=3 & \text{غ. ق. ق.} \\ x=\frac{1}{2} & \text{غ. ق. ق.} \end{cases}$$

هر دو ریشه مخرج را صفر می‌کنند و غیرقابل قبول هستند. بنابراین معادله ریشه ندارد.

د) $$\frac{1}{(x-2)^2}+\frac{4}{x-2}+3=0$$

طرفین معادله را در $(x-2)^2$ ضرب می‌کنیم:

$$1+4(x-2)+3(x-2)^2=0 \Rightarrow 1+4x-8+3x^2-12x+12=0$$

$$3x^2-8x+5=0 \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{5}{3} \\ x=1 \end{cases}$$

هر دو ریشه قابل قبول هستند.

ذ) $\frac{۱}{(x^۲-x)^۲+۱}+\frac{۱}{(x^۲-x)^۲+۲}=\frac{۳}{۲}$

با فرض $A=(x^۲-x)^۲$ داریم:

$$\frac{۱}{A+۱}+\frac{۱}{A+۲}=\frac{۳}{۲}\Rightarrow\frac{(A+۲)+(A+۱)}{A^۲+۳A+۲}=\frac{۳}{۲}\Rightarrow ۳A^۲+۹A+۶=۴A+۶$$

$$\Rightarrow ۳A^۲+۵A=۰\Rightarrow\left|\begin{array}{l}A=۰\Rightarrow(x^۲-x)^۲=۰\Rightarrow\left|\begin{array}{l}x=۰\\x=۱\end{array}\right.\\A=\frac{-۵}{۳}\Rightarrow(x^۲-x)^۲=\frac{-۵}{۳}\ \text{غ. ق. ق.}\end{array}\right.$$

ر) $\frac{x^۲+۱}{x}+\frac{x}{x^۲+۱}=۲$

با فرض $A=\frac{x^۲+۱}{x}$ داریم:

$$A+\frac{۱}{A}=۲\Rightarrow\frac{A^۲+۱}{A}=۲\Rightarrow A^۲-۲A+۱=۰\Rightarrow(A-۱)^۲=۰\Rightarrow A=۱\Rightarrow\frac{x^۲+۱}{x}=۱\Rightarrow x^۲+۱=x$$

$$\Rightarrow x^۲-x+۱=۰\Rightarrow\Delta<۰\Rightarrow$$ معادله ریشه ندارد.

ژ) $\frac{۱}{x^۲-۲x+۲}+\frac{۲}{x^۲-۲x+۳}=\frac{۶}{x^۲-۲x+۴}$

$$x^۲-۲x=t\Rightarrow\frac{۱}{t+۲}+\frac{۲}{t+۳}-\frac{۶}{t+۴}=۰\Rightarrow\frac{۱(t+۳)(t+۴)+۲(t+۲)(t+۴)-۶(t+۲)(t+۳)}{(t+۲)(t+۳)(t+۴)}=۰$$

$$\Rightarrow t^۲+۷t+۱۲+۲(t^۲+۶t+۸)-۶(t^۲+۵t+۶)=۰\Rightarrow ۳t^۲+۱۱t+۸=۰$$

$$\Rightarrow\begin{cases}t=-۱\Rightarrow x^۲-۲x=-۱\Rightarrow x^۲-۲x+۱=۰\Rightarrow x=۱\\t=-\frac{۸}{۳}\Rightarrow x^۲-۲x=-\frac{۸}{۳}\Rightarrow ۳x^۲-۶x+۸=۰\Rightarrow\Delta<۰\Rightarrow\text{ریشه ندارد.}\end{cases}$$

اگر جواب $x=۱$ را در معادله امتحان کنیم، می‌بینیم که در معادله صدق می‌کند. در نتیجه این معادله یک ریشه دارد.

-۱۴۶

$$\frac{۱}{x_a}+\frac{۱}{x_b}=\frac{۱}{۷/۵}$$

$$\frac{۱}{x_b+۲۰}+\frac{۱}{x_b}=\frac{۲}{۱۵}\Rightarrow\frac{۲x_b+۲۰}{(x_b+۲۰)x_b}=\frac{۲}{۱۵}\Rightarrow x_b^۲+۲۰x_b=۱۵x_b+۱۵۰$$

$$\Rightarrow x_b^۲+۵x_b-۱۵۰=۰\Rightarrow x_b=۱۰\Rightarrow x_a=۳۰$$

-۱۴۷

الف) $\sqrt{2x}-\sqrt{x+1}=0 \Rightarrow \begin{cases}2x\ge 0 \Rightarrow x\ge 0\\ x+1\ge 0 \Rightarrow x\ge -1\end{cases} \xrightarrow{\cap} x\ge 0$

$\sqrt{2x}=\sqrt{x+1}\Rightarrow 2x=x+1\Rightarrow x=1$ ق. ق.

ب) $\sqrt{2x}+\sqrt{x+1}=0$

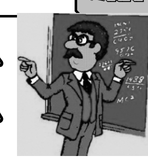
هم مقدار $\sqrt{2x}$ و هم مقدار $\sqrt{x+1}$ نامنفی است. پس جمع آن‌ها زمانی صفر می‌گردد که هر دو با هم صفر شوند، که این موضوع هم امکان‌پذیر نمی‌باشد، زیرا رادیکال اول به ازای $x=0$ و رادیکال دوم به ازای $x=-1$ صفر می‌گردند. پس معادله ریشه ندارد.

ت) $\sqrt{x}+\sqrt{x+5}=5 \Rightarrow \begin{cases}x\ge 0 \Rightarrow x\ge 0\\ x+5\ge 0 \Rightarrow x\ge -5\end{cases} \xrightarrow{\cap} x\ge 0 \Rightarrow \sqrt{x+5}=5-\sqrt{x}$

$\Rightarrow x+5=(5-\sqrt{x})^2 \Rightarrow \cancel{x}+5=25-10\sqrt{x}+\cancel{x} \Rightarrow 10\sqrt{x}=20$

$\Rightarrow \sqrt{x}=2 \Rightarrow x=4$ ق. ق.

نکته:



در این سوال اگر متوجه شرط (A) نشوید و آن را به توان ۲ برسانید به $x=3$ دست می‌یابید که با جای‌گذاری آن در اصل سوال متوجه می‌گردید که این جواب یک جواب اضافی است و غیرقابل قبول است.

خ) $\sqrt{x+1}-\dfrac{2}{\sqrt{x+1}}=1 \Rightarrow \begin{cases}x+1\ge 0\\ x+1>0\end{cases} \Rightarrow x>-1$

$\Rightarrow \sqrt{x+1}-\dfrac{2}{\sqrt{x+1}}=1 \xrightarrow{\text{ضرب طرفین در } \sqrt{x+1}} (\sqrt{x+1})^2-2=\sqrt{x+1}$

$\Rightarrow x-1=\sqrt{x+1} \xrightarrow{(x\ge 1)} (x-1)^2=x+1 \Rightarrow x^2-3x=0$

$\Rightarrow x(x-3)=0 \Rightarrow \left| \begin{array}{l} x=0 \quad \text{با شرط } x\ge 1 \text{ متناقض است.} \\ x=3 \quad \text{ق. ق.} \end{array} \right.$

ز) $\sqrt[3]{2x}+\sqrt[3]{x+1}=1 \xrightarrow[\text{مطابق اتحاد}]{\text{به توان ۳ می‌رسانیم}} (a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$

$\Rightarrow (2x)+(x+1)+3(\sqrt[3]{2x})(\sqrt[3]{x+1})(\underbrace{\sqrt[3]{2x}+\sqrt[3]{x+1}}_{1})=1$

$\Rightarrow 3x+1+3(\sqrt[3]{2x})(\sqrt[3]{x+1})(1)=1$

$\Rightarrow 3x+1+3\sqrt[3]{2x^2+2x}=1 \Rightarrow 3\sqrt[3]{2x^2+2x}=-3x$

$\Rightarrow \sqrt[3]{2x^2+2x}=-x \Rightarrow 2x^2+2x=-x^3 \Rightarrow x^3+2x^2+2x=0$

$\Rightarrow x(x^2+2x+2)=0 \Rightarrow x=0$ و $x^2+2x+2=0 \Rightarrow \Delta<0$

ص) $\sqrt[3]{x-\frac{2}{x}}+\sqrt[3]{\frac{x}{x^2-2}}=-2\Rightarrow\sqrt[3]{\frac{x^2-2}{x}}+\sqrt[3]{\frac{x}{x^2-2}}=-2\Rightarrow\sqrt[3]{\frac{x^2-2}{x}}=t\Rightarrow\sqrt[3]{\frac{x}{x^2-2}}=\frac{1}{t}$

$$\Rightarrow t+\frac{1}{t}=-2\Rightarrow t^2+2t+1=0\Rightarrow t=-1$$

$$\sqrt[3]{\frac{x^2-2}{x}}=-1\Rightarrow\frac{x^2-2}{x}=-1\Rightarrow x^2-2=-x\Rightarrow x^2+x-2=0\Rightarrow\begin{cases}x=1\\x=-2\end{cases}$$

ض) $\sqrt{x^2+3x+12}+\sqrt{x^2+3x+5}=7\Rightarrow x^2+3x=t\Rightarrow\sqrt{t+12}+\sqrt{t+5}=7$

$$\Rightarrow\sqrt{t+12}=7-\sqrt{t+5}$$

طرفین به توان ۲ $\Rightarrow t+12=49+t+5-14\sqrt{t+5}\Rightarrow 14\sqrt{t+5}=42\Rightarrow\sqrt{t+5}=3$

$$\Rightarrow t+5=9\Rightarrow t=4$$

$$x^2+3x=4\Rightarrow x^2+3x-4=0\Rightarrow\begin{cases}x=1\\x=-4\end{cases}$$

چون عبارت‌های زیر رادیکال همواره مثبت هستند. لذا دامنه‌ی عبارت فوق برابر $\mathbb{R}$ بوده و هر دو جواب قابل قبول هستند.

ط) $\sqrt[3]{\sqrt{x^2-3}+7}+\sqrt[3]{9-\sqrt{x^2-3}}=4\Rightarrow\sqrt{x^2-3}=t\Rightarrow\sqrt[3]{t+7}+\sqrt[3]{9-t}=4$

$$\xrightarrow[\text{توان ۳}]{\text{طرفین به}} t+7+9-t+3\left(\sqrt[3]{(t+7)(9-t)}\right)\left(\underbrace{\sqrt[3]{t+7}+\sqrt[3]{9-t}}_{4}\right)=64$$

$$\Rightarrow 12\sqrt[3]{-t^2+2t+63}=48\Rightarrow -t^2+2t+63=64$$

$$\Rightarrow t^2-2t+1=0\Rightarrow t=1$$

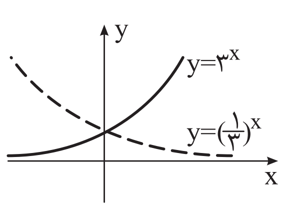
$$\sqrt{x^2-3}=1\Rightarrow x^2-3=1\Rightarrow x^2=4\Rightarrow x=\pm 2$$

۱۴۸- $A(x,2x+1)\Rightarrow d=\sqrt{x^2+y^2}\Rightarrow\sqrt{10}=\sqrt{x^2+(2x+1)^2}\Rightarrow 10=x^2+(2x+1)^2$

$$\Rightarrow 10=x^2+4x^2+4x+1\Rightarrow 5x^2+4x-9=0\Rightarrow\left|\begin{array}{l}x=1\quad\Rightarrow\ y=3\\x=\frac{-9}{5}\ \Rightarrow\ y=\frac{-13}{5}\end{array}\right.$$

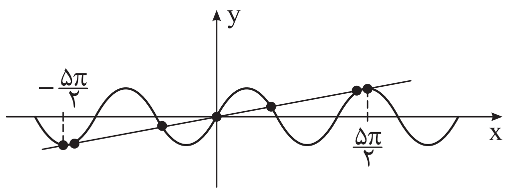
۱۵۰- تنها ریشه‌ی معادله $x=0$ است.

$$3^x=(\frac{1}{3})^x$$



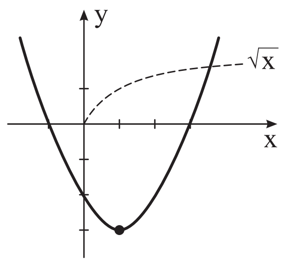
۱۵۲- معادله هفت ریشه دارد.

$$\sin x = \frac{2x}{5\pi}$$



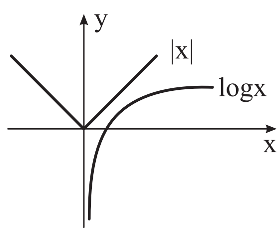
۱۵۳- معادله یک ریشه دارد.

$$\sqrt{x} + 2x = x^2 - 2$$
$$\sqrt{x} = x^2 - 2x - 2$$



۱۵۶- معادله هیچ ریشه‌ای ندارد.

$$|x| = \log x$$



-۱۵۷

پ) $\sqrt{5-2\sqrt{6}} = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{3})^2 - 2\sqrt{2}\sqrt{3}} = \sqrt{(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2} = |\sqrt{2}-\sqrt{3}|$

$= -(\sqrt{2}-\sqrt{3}) = \sqrt{3}-\sqrt{2}$

ث) $\sqrt{x^4 + 4x^2 + 4} = \sqrt{(x^2+2)^2} = |x^2+2| = x^2+2$

چ) $\sqrt{1-2\sin x\cos x} = \sqrt{\sin^2 x + \cos^2 x - 2\sin x\cos x} = \sqrt{(\sin x - \cos x)^2}$

$$|\sin x - \cos x| \xRightarrow{0 < x < \frac{\pi}{4} \Rightarrow \cos x > \sin x} -(\sin x - \cos x) = \cos x - \sin x$$

-۱۵۹ $x^2 + 4x + 3 \le 0 \Rightarrow (x+1)(x+3) \le 0 \Rightarrow -3 \le x \le -1$

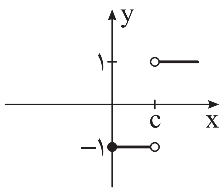
و داریم:

$-3 \le x \le -1 \Rightarrow 6 \ge -2x \ge 2 \Rightarrow 7 \ge 1-2x \ge 3 \Rightarrow |1-2x| = 1-2x$

$-3 \le x \le -1 \Rightarrow -9 \le 3x \le -3 \Rightarrow -7 \le 3x+2 \le -1 \Rightarrow |3x+2| = -3x-2$

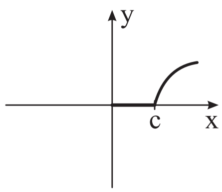
$A = |1-2x| - |3x+2| = (1-2x) + 3x + 2 = x + 3$

-۱۶۲



الف) $y=\frac{f(x)}{|f(x)|}$

$$y=\begin{cases}۱ & f(x)>۰\Rightarrow x>c\\ -۱ & f(x)<۰\Rightarrow x<c\end{cases}$$

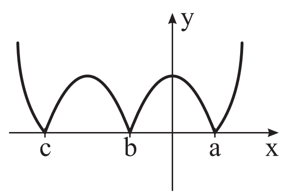


ب) $y=\frac{f(x)+|f(x)|}{۲}$

$$y=\begin{cases}f(x) & f(x)\geq ۰\Rightarrow x\geq c\\ ۰ & f(x)<۰\Rightarrow x<c\end{cases}$$

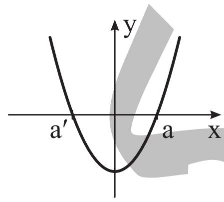
-۱۶۳

الف) $|f(x)|$



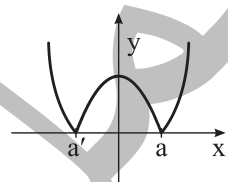
برای رسم نمودار $|f(x)|$ ابتدا نمودار $f(x)$ را رسم کرده و سپس قسمت‌هایی از نمودار که زیر محور xها قرار دارد را را به صورت قرینه به بالا منتقل می‌کنیم.

ب) $f(|x|)$



برای رسم نمودار $f(|x|)$ ابتدا بخشی از نمودار که در سمت چپ $(x<۰)$ قرار گرفته را حذف کرده و سپس قسمت راست نمودار $(x>۰)$ را نسبت به محور y ها قرینه می‌کنیم.

پ) $|f(|x|)|$



ابتدا نمودار $f(|x|)$ را رسم کرده و سپس قسمت‌های پایین محور xها را به بالا قرینه می‌کنیم.

-۱۶۵ $|۲x-۱|<۰/۴\Rightarrow -۰/۴<۲x-۱<۰/۴\Rightarrow ۰/۶<۲x<۱/۴\Rightarrow ۰/۳<x<۰/۷$

برای بیان فارسی می‌توانیم بنویسیم:

$$|۲x-۱|<۰/۴\Rightarrow ۲|x-\frac{۱}{۲}|<۰/۴\Rightarrow |x-\frac{۱}{۲}|<۰/۲$$

بنابراین x مجموعه‌ای از اعداد حقیقی است که اختلاف آن‌ها از $\frac{۱}{۲}$ حداکثر ۰/۲ باشد.

-۱۶۶

الف) $۲<x<۴\xrightarrow[\text{طرفین کم می‌کنیم.}]{\text{میانگین ۲ و ۴ را از}}۲-۳<x-۳<۴-۳\Rightarrow -۱<x-۳<۱\Rightarrow |x-۳|<۱$

-۱۶۷

الف) $-|x| \le x \le |x|$

$$\frac{\quad -|y| \le y \le |y| \quad}{-(|x|+|y|) \le x+y \le |x|+|y|}$$

$$|x+y| \le |x|+|y|$$

-۱۶۸ (I)
$$(a-1)^2 \ge 0 \Rightarrow a^2-2a+1 \ge 0 \Rightarrow a^2+1 \ge 2a \xrightarrow[a>0]{\text{تقسم طرفین بر } a} \frac{a^2+1}{a} \ge \frac{2a}{a} \Rightarrow a+\frac{1}{a} \ge 2$$

از طرفی داریم:

(II)
$$(a+1)^2 \ge 0 \Rightarrow a^2+2a+1 \ge 0 \Rightarrow a^2+1 \ge -2a \xrightarrow[a>0]{\text{تقسم طرفین بر } a} a+\frac{1}{a} \le -2$$

از نتایج (I) و (II) داریم:
$$|a+\frac{1}{a}| \ge 2$$

-۱۷۰

الف) $f(x)=x^2|x|=\begin{cases} x^3 & x \ge 0 \\ -x^3 & x<0 \end{cases}$

ب) $f(x)=|x-2|+|x+2|=\begin{cases} (x-2)+(x+2) & x \ge 2 \\ -(x-2)+(x+2) & -2 \le x \le 2 \\ -(x-2)-(x+2) & x \le -2 \end{cases}=\begin{cases} 2x & x \ge 2 \\ 4 & -2 \le x < 2 \\ -2x & x<-2 \end{cases}$

ج) $f(x)=|x||x-3|=|x^2-3x|=\begin{cases} x^2-3x & x \ge 3 \text{ یا } x \le 0 \\ -(x^2-3x) & 0 \le x \le 3 \end{cases}$

		0		3	
x^2-3x	+	∘	−	∘	+

چ) $f(x)=\dfrac{x}{|x|}=\begin{cases} \dfrac{x}{x} & x>0 \\ \dfrac{x}{-x} & x<0 \end{cases}=\begin{cases} 1 & x>0 \\ -1 & x<0 \end{cases}$

-۱۷۱

ب) $\big||x-1|+1\big|=2 \Rightarrow \begin{cases} |x-1|+1=2 \Rightarrow |x-1|=1 \Rightarrow \begin{cases} x-1=1 \Rightarrow x=2 \\ x-1=-1 \Rightarrow x=0 \end{cases} \\ |x-1|+1=-2 \Rightarrow |x-1|=-3 \quad \text{غ. ق. ق} \end{cases}$

ت) $|x-۲|=۲x+۱ \Rightarrow \begin{cases} x-۲=۲x+۱ & x\geq ۲ \\ -(x-۲)=۲x+۱ & x<۲ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-۳ & x\geq ۲ \\ -x+۲=۲x+۱ & x<۲ \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x=-۳ & \text{غ. ق. ق.} \\ x=\frac{۱}{۳} \quad x<۲ & \text{ق. ق.} \end{cases} \Rightarrow x=\frac{۱}{۳}$

ج) $|۲x|+|x-۱|=۴ \Rightarrow \begin{cases} ۲x+x-۱=۴ & x\geq ۱ \\ ۲x-(x-۱)=۴ & ۰<x<۱ \\ -۲x-(x-۱)=۴ & x\leq ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۳x-۱=۴ \Rightarrow x=\frac{۵}{۳} & x\geq ۱ \\ x+۱=۴ \Rightarrow x=۳ & ۰<x<۱ \\ -۳x+۱=۴ \Rightarrow x=-۱ & x\leq ۰ \end{cases}$

با توجه به شرطها $\Rightarrow \begin{cases} x=\frac{۵}{۳} & \text{ق. ق.} \\ x=۳ & \text{غ. ق. ق.} \\ x=-۱ & \text{ق. ق.} \end{cases}$

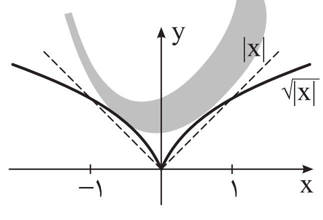
۱۷۲- به‌طور کلی معادله‌ی $|x-a|+|x-b|=K$ زمانی دو ریشه دارد که $K>|a-b|$ باشد.

معادله‌ی $|x-۴m|+|x-۶m|=۲$ زمانی دو ریشه دارد که $|۴m-۶m|<۲$ باشد. یعنی:

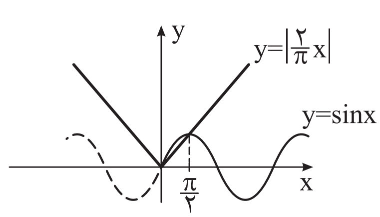
$|-۲m|<۲ \Rightarrow |۲m|<۲ \Rightarrow |m|<۱ \Rightarrow -۱<m<۱$

۱۷۳-

الف) دو ریشه دارد. $x=۱$ و $x=-۱$

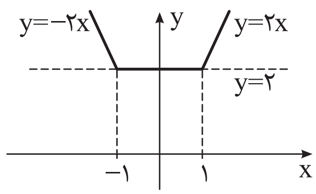


پ) معادله دو ریشه در $x=۰$ و $x=\frac{\pi}{۲}$ دارد.



ث) برای رسم تابع $y=|x-۱|+|x+۱|$، ابتدا آن را به صورت چند ضابطه‌ای درمی‌آوریم:

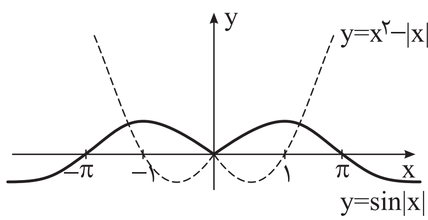
$$f(x)=\begin{cases}(x-۱)+(x+۱) & x\geq ۱\\ -(x-۱)+(x+۱) & -۱\leq x\leq ۱\\ -(x-۱)-(x+۱) & x\leq ۱\end{cases}$$



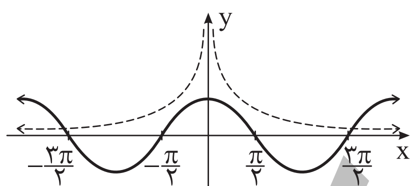
$$f(x)=\begin{cases}۲x & x\geq ۱\\ ۲ & -۱< x< ۱\\ -۲x & x\leq -۱\end{cases}$$

دو منحنی در بازه‌ی $[-۱,۱]$ روی هم می‌افتند و معادله بی‌شمار ریشه پیدا می‌کند.

ح) بنابراین معادله دو ریشه دارد.



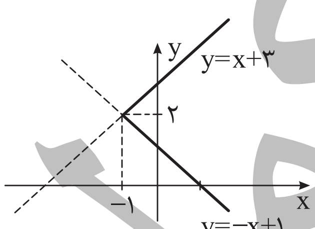
د) مطابق شکل دو منحنی یکدیگر را در بی‌شمار نقطه قطع می‌کنند. پس معادله بی‌شمار ریشه دارد.



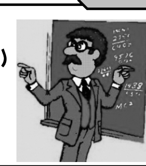
۱۷۴-

ب) $|y-۲|=x+۱\Rightarrow\begin{cases}y-۲=x+۱ & y\geq ۲\\ -(y-۲)=x+۱ & y< ۲\end{cases}$

$$\Rightarrow\begin{cases}y=x+۳ & y\geq ۲\\ y=-x+۱ & y< ۲\end{cases}$$



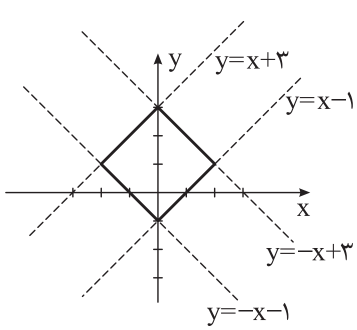
نکته:



رابطه‌هایی به شکل $|ay+b|=cx+d$ به صورت > یا < می‌باشند و رأس آن‌ها نقطه‌ی $(-\frac{d}{c},-\frac{b}{a})$ می‌باشد.

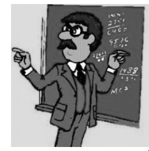
پ) $|x|+|y-۱|=۲$

$$\begin{cases}x\geq ۰\ ,\ y\geq ۱\Rightarrow x+y-۱=۲\Rightarrow y=۳-x\\ x<۰\ ,\ y<۱\Rightarrow -x-y+۱=۲\Rightarrow y=-x-۱\\ x<۰\ ,\ y\geq ۱\Rightarrow -x+y-۱=۲\Rightarrow y=۳+x\\ x\geq ۰\ ,\ y<۱\Rightarrow x-y+۱=۲\Rightarrow y=x-۱\end{cases}$$



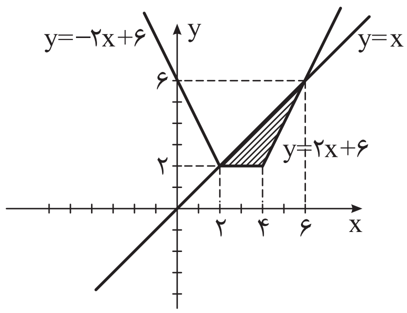
شکل مربعی است به مرکز $(۰,۱)$ و به قطر ۴

نکته:



رابطه‌ی $|x-\alpha|+|y-\beta|=K$ مربعی است به مرکز (α,β) و قطر $۲K$ و رابطه‌ی $a|x-\alpha|+b|y-\beta|=K$ یک لوزی است به مرکز (α,β) و قطرهای $\frac{۲K}{a}$ و $\frac{۲K}{b}$.

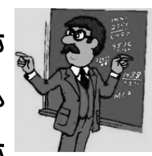
۱۷۶-

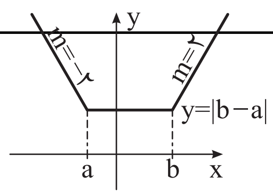


$$y=|x-۲|+|x-۴|=\begin{cases}۲x-۶ & x\geq ۴\\ ۲ & ۲<x<۴\\ -۲x+۶ & x\leq ۲\end{cases}$$

ارتفاع این مثلث مطابق شکل برابر ۴ و قاعده‌ی آن برابر ۲ می‌باشد. بنابراین مساحت مثلث برابر ۴ می‌گردد.

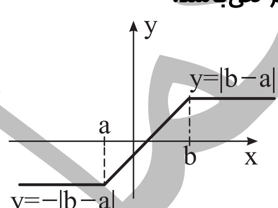
نکته:

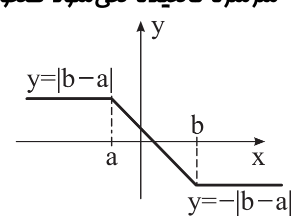




تابع به صورت $y=|x-a|+|x-b|$ که تابع گلدانی نامیده می‌شود. همواره به شکل مقابل درمی‌آید.

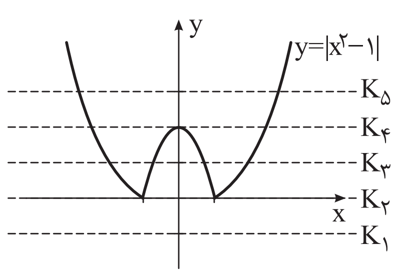
تابع به صورت $y=|x-a|-|x-b|$ که تابع آبشاری یا سرسره نامیده می‌شود همواره به یکی از دو شکل زیر می‌باشد.





۱۷۸- همان‌طور که مشاهده می‌نمایید، در صورتی‌که $K<\circ$ باشد،

یعنی خط $K_۱$، معادله ریشه ندارد.



$K=\circ$ باشد، یعنی خط $K_۲$ ، معادله ۲ ریشه دارد.

$۱>K>\circ$ باشد، یعنی خط $K_۳$، معادله ۴ ریشه دارد.

$K=۱$ باشد، یعنی خط $K_۴$، معادله ۳ ریشه دارد.

$K>۱$ باشد، یعنی خط $K_۵$، معادله ۲ ریشه دارد.

پس بیش‌ترین ریشه، در حالتی اتفاق می‌افتد که $۱>K>\circ$ باشد.

-۱۷۹

$$-۵<x<۱ \Rightarrow -۴<x+۱<۲ \Rightarrow \begin{cases} ۰\le x+۱<۲ \quad \Rightarrow \quad ۰\le |x+۱|<۲ \\ \qquad \text{یا} \qquad\qquad\qquad \text{یا} \\ -۴<x+۱<۰ \quad \Rightarrow \quad ۰<|x+۱|<۴ \end{cases} \xrightarrow{\ \cup\ } ۰\le |x+۱|<۴$$

-۱۸۰

الف) $|x-۲|<|x+۳| \xrightarrow[\text{می‌رسانیم}]{\text{به توان ۲}} x^۲-۴x+۴<x^۲+۶x+۹ \Rightarrow -۵<۱۰x \Rightarrow \frac{-۱}{۲}<x$

ب) $|x-۲|<x+۳ \xrightarrow[\text{است و می‌توان طرفین را به توان ۲ رساند}]{x+۳ \text{ از قدر مطلق بزرگ‌تر است پس مثبت}} (x-۲)^۲<(x+۳)^۲$

$$\Rightarrow x^۲-۴x+۴<x^۲+۶x+۹ \Rightarrow -۵<۱۰x \Rightarrow \frac{-۱}{۲}<x$$

پ) $x-۲<|x+۳| \xrightarrow[\text{نامعلوم است و اجازه‌ی به توان ۲ رساندن را نداریم.}]{x-۲ \text{ از قدر مطلق کوچک‌تر است پس علامت آن}} \begin{cases} x-۲<x+۳ & x\ge -۳ \\ \text{یا} & \\ x-۲<-(x+۳) & x<-۳ \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} -۲<۳ \quad \text{همواره برقرار} & x\ge -۳ \\ \text{یا} & \\ ۲x<-۱ \Rightarrow x<-\frac{۱}{۲} & x<-۳ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\ge -۳ \\ \text{یا} \\ x<-\frac{۱}{۲} \cap \quad x<-۳ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x\ge -۳ \\ x<-۳ \end{cases} \Rightarrow \text{مجموعه‌ی جواب}: \mathbb{R}$$

ث) $\big||x-۲|-۳\big|<۴ \Rightarrow -۴<|x-۲|-۳<۴ \Rightarrow -۱<|x-۲|<۷$

نامساوی سمت چپ بدیهی است؛ چون قدر مطلق هموار از (-۱) بزرگ‌تر می‌گردد. پس:

$$|x-۲|<۷ \Rightarrow -۷<x-۲<۷ \Rightarrow -۵<x<۹$$

چ) $|x^۳-۸|<x^۲+۲x+۴ \Rightarrow |x-۲||x^۲+۲x+۴|<x^۲+۲x+۴$

با توجه به این‌که در $x^۲+۲x+۴$ مقدار $\Delta<۰$ است. پس عبارت همواره مثبت است و داریم:

$$|x-۲|\cancel{(x^۲+۲x+۴)}<\cancel{x^۲+۲x+۴} \Rightarrow |x-۲|<۱ \Rightarrow -۱<x-۲<۱ \Rightarrow ۱<x<۳$$

ز) $\sqrt{x-۱}+\sqrt{x+۲}\le ۱ \Rightarrow \begin{cases} x-۱\ge ۰ \quad \Rightarrow \quad x\ge ۱ \\ x+۲\ge ۰ \quad \Rightarrow \quad x\ge -۲ \end{cases} \xrightarrow{\ \cap\ } x\ge ۱$

$$\Rightarrow \sqrt{x-۱}+\sqrt{x+۲}\le ۱ \xrightarrow{\text{توان ۲}} (x-۱)+(x+۲)+۲\sqrt{(x-۱)(x+۲)}\le ۱$$

$$\Rightarrow ۲x+۱+۲\sqrt{x^۲+x-۲}\le ۱ \Rightarrow ۲x\le -۲\sqrt{x^۲+x-۲}$$

$$\Rightarrow x\le -\sqrt{x^۲+x-۲} \Rightarrow x\in \mathbb{R}^-\cup\{۰\}$$

که با توجه به شرط اولیه ، این رابطه امکان‌پذیر نمی‌باشد. پس مجموعه جواب نامعادله $\varnothing$ است.

-۱۸۱ $$\frac{x^۲+۳x+a}{x^۲+x+۱}<۲ \Rightarrow \frac{x^۲+۳x+a}{x^۲+x+۱}-۲<۰ \Rightarrow \frac{x^۲+۳x+a-۲x^۲-۲x-۲}{x^۲+x+۱}<۰$$

$\Rightarrow \dfrac{-x^۲+x+(a-۲)}{x^۲+x+۱}<۰ \Rightarrow$ با توجه به این‌که مخرج ریشه ندارد و ضریب $x^۲$ نیز در آن مثبت است، پس عبارتی است، همواره مثبت.

$$-x^۲+x+(a-۲)<۰ \Rightarrow \begin{cases}\Delta<۰\\ \text{ضریب } x^۲<۰\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}(+۱)^۲-۴(-۱)(a-۲)<۰\\ -۱<۰\end{cases} \Rightarrow ۱+۴(a-۲)<۰$$

$$\Rightarrow ۴a<۷ \Rightarrow a<\frac{۷}{۴}$$

-۱۸۴ $$|x+۱|\leq ۱ \Rightarrow -۱\leq x+۱\leq ۱ \Rightarrow -۲\leq ۲x+۲\leq ۲ \Rightarrow ۱\leq ۲x+۵\leq ۵ \Rightarrow ۱\leq |۲x+۵|\leq ۵$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۱}\geq \frac{۱}{|۲x+۵|}\geq \frac{۱}{۵} \Rightarrow \frac{۱}{۵}\leq \left|\frac{۱}{۲x+۵}\right|\leq ۱ \Rightarrow \begin{cases}K=۱\\ K'=\frac{۱}{۵}\end{cases} \Rightarrow K+K'=۱+\frac{۱}{۵}=\frac{۶}{۵}$$

-۱۸۵ با توجه به نمودارها در بازه‌ی $(۱,۲)$ عبارت $|x-۳|$ بالای $\sqrt{x-۱}$ است. پس از آن بزرگ‌تر می‌شود.

در $x=۲$ دو تابع با هم مساوی‌اند.

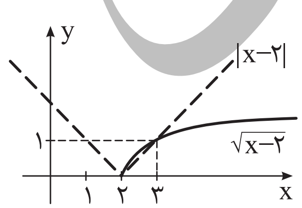
در بازه‌ی $(۵,+\infty)$ نیز مجدداً تابع $|x-۳|$ بالای $\sqrt{x-۱}$ قرار می‌گیرد و از آن بزرگ‌تر می‌شود.

در $x=۵$ نیز دو تابع با هم مساوی‌اند.

پس به‌طور کلی:

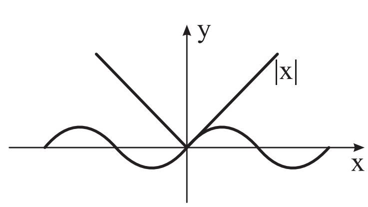
$$|x-۳|\geq \sqrt{x-۱} \Rightarrow \begin{cases}x\geq ۵\\ \cup\\ ۱\leq x\leq ۲\end{cases}$$

-۱۸۶ الف) $x>۳$



ب) $|\sin x|\geq |x|$

بنابراین مجموعه جواب این نامعادله فقط $x=۰$ است که دو تابع با هم برابرند.

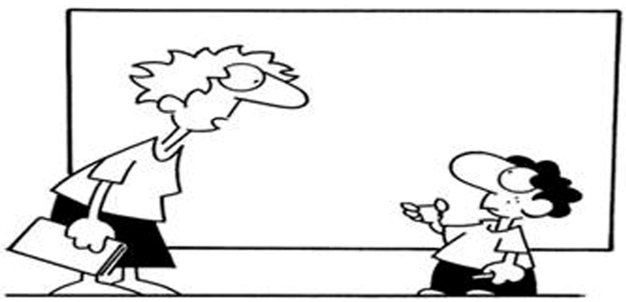


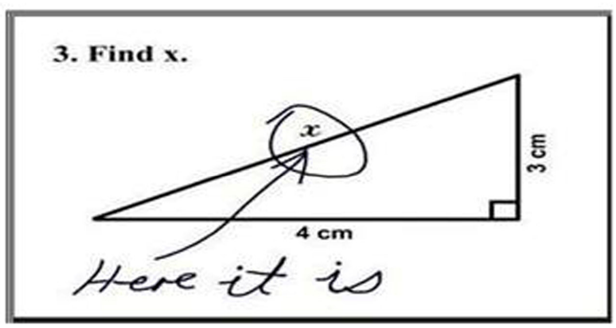
فصل دوم

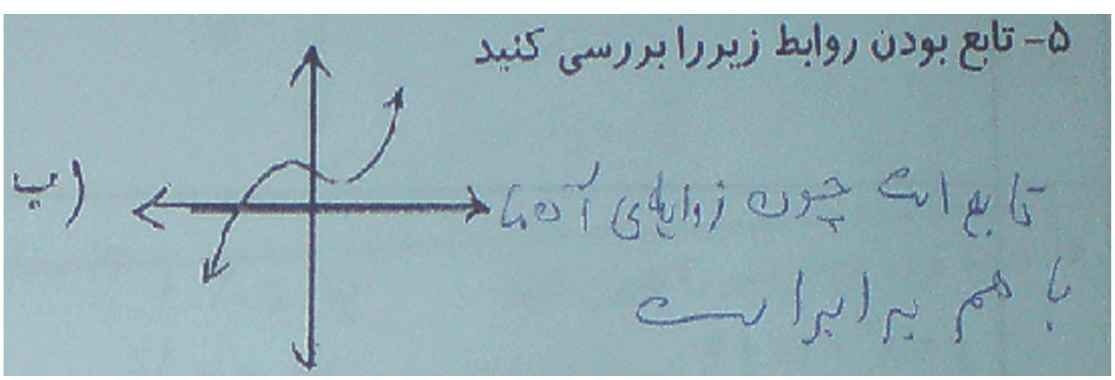
تابع

نویسندگان و ویراستاران:استادان اشرفي،خرمی

اشتباه خنده دار یک دانش آموز در ریاضی







فصل دوم

تابع

※ ۱- تعداد توابعی که می‌توان از $A=\{۱,۲\}$ بر $B=\{a,b,c\}$ ساخت را بیابید.

۲- اگر دو مجموعه‌ی $A=\{a_۱,a_۲,a_۳,...,a_n\}$ و $B=\{b_۱,b_۲,...,b_m\}$ باشند و $f:A\to B$، آن‌گاه:

الف) به طور کلی چند تابع f موجود است؟

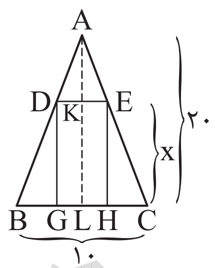
ب) چند تابع f موجود است که در آن‌ها $f(a_۱)=b_۱$ باشد؟

پ) چند تابع ثابت موجود است؟

ت) چند تابع موجود است که $f(a_۱)\neq b_۱$ باشد؟

۳- مجموع دو عدد غیرصفر برابر ۲۰ می‌باشد. مجموع معکوس‌های این دو عدد را به عنوان تابعی از عدد کوچک‌تر بیان کنید.

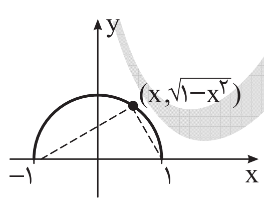
۴- مطابق شکل مقابل مستطیلی در درون مثلث متساوی‌الساقینی به ارتفاع ۲۰ و قاعده‌ی ۱۰ واحد قرار گرفته است. اگر طول مستطیل x باشد، تابعی بنویسید که مساحت مستطیل را برحسب x بیان کند.



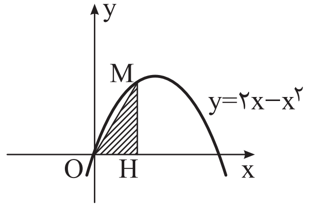
۵- قطر مستطیلی $۲\sqrt{۲}$ است. مساحت آن را به صورت تابعی برحسب یک ضلع مستطیل بنویسید.

※ ۶- تابع $y=۲x-۱$ را در نظر بگیرید. فاصله‌ی نقاط این تابع از نقطه‌ی $A\left|\begin{matrix}۱\\۲\end{matrix}\right.$ را برحسب تابعی از x بیابید.

۷- با توجه به شکل مقابل رأس سوم مثلث روی دایره حرکت می‌کند.
تابعی بنویسید که مساحت مثلث را برحسب x به دست آورد.



※ ۸- در شکل زیر اگر M روی منحنی حرکت کند، مساحت مثلث OMH را به صورت تابعی از x بیابید.



❊ ۹- مجموع دو عدد حقیقی برابر ۴ است. بیش‌ترین مقدار حاصل‌ضرب آن‌ها را بیابید.

۱۰- بیش‌ترین مقدار $f(x)=(K+3)x^2-4x+K$ برابر صفر است. K را بیابید.

۱۱- در هر یک از مسائل زیر مشخص کنید که آیا y تابعی از x هست یا خیر؟

❊ الف) $x^2+y^3=3$

ب) $|x|+|y^2-1|=0$

پ) $|x+y|=3$

❊ ت) $xy=0$

ث) $x=\sin y+1$

ج) $|y|=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{x^2-1}$

❊ چ) $\log y=1+\log x$

ح) $10^x+10^y=10$

❊ خ) $f=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x=2\}$

د) $f(x)=\begin{cases}3x+5 & x>0\\ x-2 & x<1\end{cases}$

۱۲- معادله‌ی $\cos 2y-5x=1$ در اعداد حقیقی یک تابع برحسب x یا y را معین می‌کند. چرا؟ دامنه و برد تابع را بیابید.

۱۳- اگر $f(x)=\begin{cases}2x+\dfrac{x-1}{|x|+1} & x\le 0\\ b+2x-3 & x\ge 0\end{cases}$ نمایش یک تابع باشد، مقدار b را بیابید.

❊ ۱۴- کدام‌یک از روابط زیر یک تابع از x بر روی y را بیان می‌کند؟

۱) $\{(x,y)\mid x,y\in\mathbb{Z}, x+y^2=10\}$

۲) $\{(x,y)\mid x,y\in\mathbb{R}, x+y^2=10\}$

۳) $\{(x,y)\mid x,y\in\mathbb{O}, x+y^2=10\}$

۴) $\{(x,y)\mid x,y\in\mathbb{R}^+, x+y^2=10\}$

❊ ۱۵- تابع چند ضابطه‌ای f را چنان بنویسید که در تمام شرایط زیر صدق کند.

الف) دامنه‌ی $[-1,5]$ و برد $[-2,4]$.

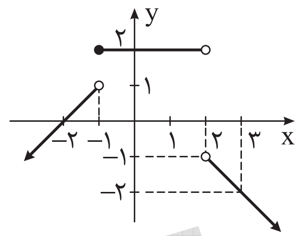
ب) $f(1)=2$

پ) f یک‌به‌یک نباشد.

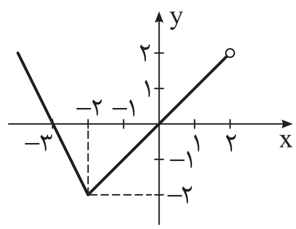
۱۶- تابع $f(x)=2|x+1|-|x|$ را به صورت یک تابع چند ضابطه‌ای بنویسید و نمودار آن را رسم کنید و از روی نمودار، دامنه و برد آن را تعیین کنید.

❋۱۷- دامنه و برد هر یک از توابع زیر را به دست آورید و سپس ضابطه‌ی هر کدام را بنویسید.

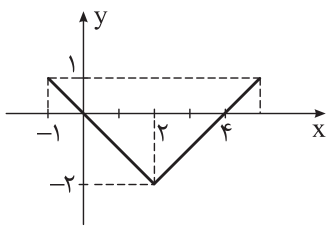
الف)



ب)



❋۱۸- ضابطه‌ی نمودار مقابل را تعیین کنید.



۱۹- دامنه‌ی توابع زیر را بیابید.

❋ الف) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x-2}+1}$ ❋

❋ ب) $f(x)=\sqrt{4-\sqrt{1-2x}}$

❋ پ) $f(x)=\sqrt{-|x+2|}$

❋ ت) $f(x)=\sqrt{5-\dfrac{x}{x+2}}$

ث) $f(x)=\sqrt{x-2\sqrt{x+1}}$

ج) $f(x)=\sqrt{\dfrac{-1}{x-|x|}}$

چ) $f(x)=\cos\sqrt{x-|x|}$

ح) $f(x)=\sqrt{\sin x}$

خ) $f(x)=\sqrt{2\sin x-1}$

❋ د) $f(x)=\sqrt{x^2-|x|-x}$

❋ ذ) $f(x)=\sqrt{\dfrac{1-|x|}{1+|x|}}$

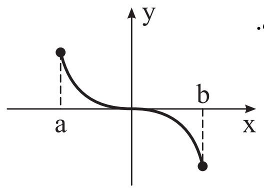
❋۲۰- حدود m را طوری بیابید که دامنه‌ی توابع زیر برابر $\mathbb{R}$ گردد.

الف) $f(x)=\dfrac{x}{x^2+mx+1}$

ب) $f(x)=\sqrt{x^2+m^2-1}$

۲۱- حدود m را طوری تعیین کند که دامنه‌ی $f(x)=\sqrt{mx^{۲}+۴x+۱}$ برابر $\mathbb{R}$ گردد.

※ ۲۲- نمودار تابع f شکل مقابل است. دامنه‌ی تابع $f(x)=\log(x^{۲}.f(x))$ را بیابید.



تساوی توابع

۲۳- کدام یک از زوج تابع‌های زیر مساویند؟

الف) $\begin{cases} f(x)=\sqrt{x^{۲}} \\ g(x)=x \end{cases}$

※ ب) $\begin{cases} f(x)=\dfrac{x|x|}{x} \\ g(x)=|x| \end{cases}$

※ پ) $\begin{cases} f(x)=\dfrac{\sin x.\cos x}{\sin x} \\ g(x)=\cos x \end{cases}$

ت) $\begin{cases} f(x)=\log x^{۲} \\ g(x)=۲\log x \end{cases}$

ث) $\begin{cases} f(x)=\tan x.\cot x \\ g(x)=\sin^{۲}x+\cos^{۲}x \end{cases}$

※ ج) $\begin{cases} f(x)=|x| \\ g(x)=a^{\log_a^{|x|}} \qquad (a>۰,\ a\neq ۱) \end{cases}$

چ) $\begin{cases} f(x)=\sin x \\ g(x)=\sqrt{۱-\cos^{۲}x} \end{cases}$

※ ح) $\begin{cases} f(x)=\dfrac{\sqrt{x-۱}}{\sqrt{x+۲}} \\ g(x)=\sqrt{\dfrac{x-۱}{x+۲}} \end{cases}$

※ خ) $\begin{cases} f(x)=\sqrt{x^{۲}-x} \\ g(x)=\sqrt{x}\sqrt{x-۱} \end{cases}$

د) $\begin{cases} f(x)=(x-۱)\sqrt{۱-x} \\ g(x)=\sqrt{(۱-x)^{۳}} \end{cases}$

ذ) $\begin{cases} f(x)=\sqrt{x}.\sqrt{-x} \\ g(x)=\sqrt{-x^2} \end{cases}$

❊ ر) $\begin{cases} f(x)=\sin^2\sqrt{x}+\cos^2\sqrt{x} \\ g(x)=1 \end{cases}$

❊ ز) $\begin{cases} f(x)=0 \\ g(x)=[\frac{x^2}{x^2+1}] \end{cases}$

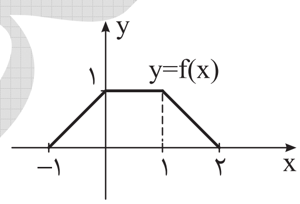
❊ ژ) $\begin{cases} f(x)=(\sqrt{x})^2 \\ g(x)=\sqrt{x^2} \end{cases}$

۲۴- اگر $f(x)=2x-1$ و $g(x)=\begin{cases} \frac{4x^2-1}{2x+1} & x\neq-\frac{1}{2} \\ 1-K & x=-\frac{1}{2} \end{cases}$ ، K را طوری بیابید که $f(x)=g(x)$ گردد.

❊۲۵- اگر دو تابع $f=\{(5,3),(-3,5)\}$ و $g=\{(b,c),(5,a),(b,5)\}$ مساوی باشند، $\frac{a+b}{c}$ را بیابید.

۲۶- اگر دو تابع $f(x)=\frac{1}{3x+\sqrt{9x^2+1}}$ و $g(x)=\sqrt{ax^2+1}-bx$ مساوی باشند، a و b را تعیین کنید.

۲۷- اگر نمودار $y=f(x)$ به صورت مقابل باشد، نمودار تابع‌های زیر را رسم کنید.



الف) $y=f(x-1)+2$

❊ ب) $y=2f(x)$

❊ پ) $y=f(2x)$

ت) $y=-2f(x)$

ث) $y=f(-2x)$

❊ ج) $y=-\frac{1}{2}f(x)+1$

❊ چ) $y=f(-\frac{1}{2}x)+1$

ح) $y=f(2x-1)$

❊ خ) $y=-f(-x+1)$

❊ د) $y=f(|x|)$

ذ) $y=f(|x-1|)+1$

ر) $|y|=f(x)$

ز) $|y|=f(|x|)$

۲۸- اگر دامنه‌ی $f(x)$ برابر با $D_f:(-۳,۶]$ و برد آن $(-۱,۵)$ باشد، دامنه و برد توابع زیر را بیابید.

الف) ※ $y=f(۲x)$

ب) ※ $y=f(\frac{۲x-۳}{۳})+۱$

پ) $y=f(|x-۱|+۳)$ (فقط دامنه)

ت) $y=۲|f(x-۱)|-۵$

۲۹- اگر در تابع f مقدار $D_f:(۲,۸)$ و $R_f:[۳,۴]$، دامنه و برد تابع $y=۲f(\frac{x-۱}{۲})-۱$ را بیابید.

※ ۳۰- اگر برد تابع $y=f(x)$ در بازه‌ی $[a,b]$ برابر $[c,d]$ باشد، در مورد دامنه و برد تابع $y=f(Kx)$ و $y=f(|x|)$ بحث کنید.

※ ۳۱- اگر دامنه تابع $y=f(x)$ برابر (a,b) باشد، راجع به دامنه‌ی تابع $y=f(x^۲)$ بحث کنید.

※ ۳۲- با توجه به نمودار $y=\sqrt{x}$ نمودارهای زیر را رسم کنید.

الف) $y=\sqrt{x}+۱$

ب) $y=۱-\sqrt{x}$

پ) $y=۲\sqrt{-x}$

ت) $y=\sqrt{-x+۲}$

ث) $y=\sqrt{۲x+۳}-۱$

ج) $y=\sqrt{|x|}$

چ) $|y|=\sqrt{|x-۱|}$

ح) $y=۲\sqrt{x}-۲$

۳۳- نمودار تابع $y=x^۲$ را نسبت به محور xها قرینه نموده و سپس همه‌ی yهای آن را نصف می‌کنیم و پس از آن منحنی را ۲ واحد در جهت چپ و یک واحد به بالا انتقال می‌دهیم. ضابطه‌ی تابع آخر را بنویسید.

چهار عمل اصلی روی توابع

※ ۳۴- اگر $f=\{(۱,۳),(۲,-۱),(۰,۳),(-۱,۱)\}$ و $g=\{(۰,۱),(-۱,۱),(۳,۳),(۲,۵)\}$ باشند، مطلوب است:

الف) $۲f$ ب) $۲f+۳g$ پ) $۳g$ ت) $۲f-g$ ث) $\frac{۲f+۱}{g}$

۳۵- اگر $f=\{(-۱,۱),(۰,۳),(۱,-۱)\}$ و $g=\{(-۱,۴),(۰,۸),(۱,۳),(۲,-۱)\}$ باشد، تابع $h(x)=\frac{g(x)}{۱+f(x)}$ را بیابید.

※ ۳۶- هرگاه $f=\{(۲,۰),(\frac{۱}{۳},۲)\}$ باشد، تابع $h(x)=\frac{۲}{f(x)}$ را بیابید.

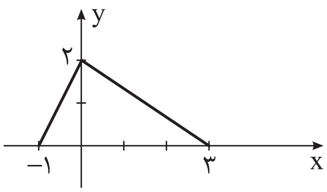
۳۷- اگر $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2-4}$ و $g=\{(1,2),(0,4),(2,1),(3,-1)\}$ باشند، تابع $f+g$ را بیابید.

* ۳۸- توابع $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ و $g(x)=x+2$ مفروض‌اند. دامنه‌ی تابع $\dfrac{f}{g}$ را بیابید.

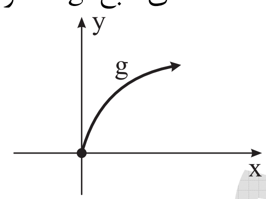
۳۹- اگر $f(x)=\sin 2x$ و $g(x)=\sqrt{x-x^2}$ باشند، آن‌گاه دامنه‌ی $\dfrac{f}{g}$ را بیابید.

۴۰- اگر $f(x)=\begin{cases} x+1 & x>0 \\ x-1 & x\le 0\end{cases}$ و $g(x)=\begin{cases} x & x\ge -2 \\ x-2 & x<-2\end{cases}$ باشند، حاصل $f+g$ را بیابید.

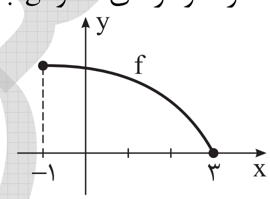
۴۱- شکل مقابل نمودار $y=f(x)$ است. دامنه‌ی تابع $y=\dfrac{f(-x)}{4f(3x)}$ را بیابید.



* ۴۲- اگر نمودارهای f و g به صورت‌های زیر باشند، دامنه‌ی تابع $f\times g$ را بیابید.

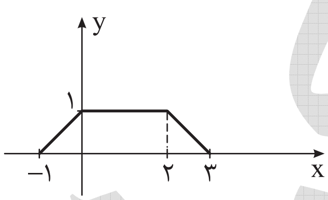


ب)

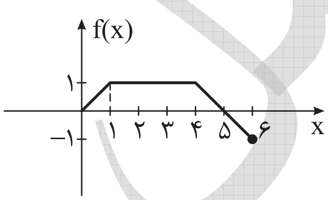


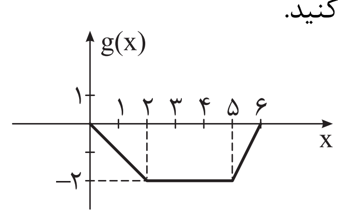
الف)

۴۳- اگر نمودار $y=f(x)$ به صورت مقابل باشد، نمودار $h(x)=f(x)+f(-x)$ را رسم کنید.



* ۴۴- اگر f و g به صورت مقابل باشند، نمودارهای $f+g$ و $f-g$ را رسم کنید.





۴۵- نمودارهای $y=x+\sin x$ و $y=x-\sin x$ را رسم کنید.

* ۴۶- نمودار مقابل مربوط به کدام تابع زیر است؟ **(المپیاد ایران – ۸۲)**

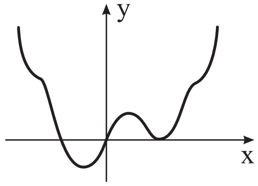
الف) $y=\dfrac{x^2}{10}\sin x$

ب) $y=\dfrac{(\tan x)^2}{10}$

پ) $y=\dfrac{x^2}{10}-1$

ت) $y=\dfrac{x^2}{10}+\cos x-1$

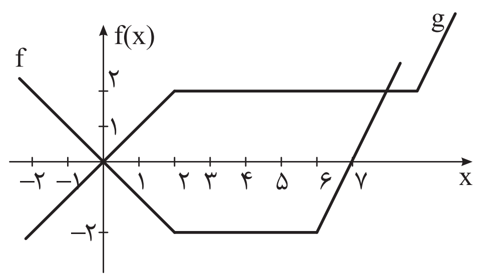
ث) $y=\dfrac{x^2}{10}+\sin x$



۴۷- اگر $f(x)=\frac{x-1}{x+1}$ باشد، حاصل $f(x).f(-\frac{1}{x})$ را بیابید.

تابع مرکب

۴۸- اگر نمودارهای f و g به صورت مقابل باشند، مقادیر خواسته‌شده را بیابید.



الف) $gof(3)=$

* ب) $gof(4)=$

پ) $fog(3)=$

* ت) $fog(4)=$

ث) $gof(-2)=$

ج) $fog(-2)=$

* چ) $gof(-1)=$

* ح) $fog(0)=$

۴۹- اگر $f(x)=|x|$ و $g(x)=x^2+2x+1$ باشد، حاصل $fog(1-\sqrt{2})-gof(1-\sqrt{2})$ را بیابید.
(سراسری - ۸۹)

* ۵۰- اگر $f=\{(1,5),(3,4)\}$ و $g=\{(-1,1),(5,3),(4,9)\}$ باشد، تابع gof را بیابید.

۵۱- اگر $f=\{(1,2),(2,3),(3,4)\}$ ، آن‌گاه تابع fof را بیابید.

۵۲- اگر $f(x)=\frac{x^2-1}{x}$ و $g(x)=x+\sqrt{x^2+1}$ باشد، ضابطه‌ی $fog(x)$ را به ساده‌ترین صورت ممکن به دست آورید.

* ۵۳- اگر $f(x)=\frac{1-x^2}{x^2}$ و $g(x)=\cos x$ باشد، مقدار $fog(x)$ را به ساده‌ترین صورت ممکن به دست آورید.

۵۴- عمل یک ماشین در دو مرحله به صورت $x_0 \xrightarrow{f} f(x_0) \xrightarrow{g} 2$ می‌باشد. اگر $\frac{1}{2}f(x)=g(x)=x-1$ باشد، مقدار x_0 را بیابید.

۵۵- در هر یک از موارد زیر $\underbrace{fofo...of}_{n\ \text{بار}}$ را محاسبه کنید.

* الف) $f(x)=x$ *

* ب) $f(x)=\frac{1}{x}$ *

پ) $f(x)=2x+5$

ت) $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$

ث) $f(x)=\dfrac{|x|}{|x|+1}$ ❋

ج) $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

چ) $f(x)=x-[x]$ ❋

ح) $f(x)=\sqrt[n]{1+x^n}$

۵۶- اگر $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & x\ge 0 \\ 1 & x<0 \end{cases}$ باشد، مقدار $f(-f(x))$ را بیابید.

❋ ۵۷- اگر $f(x)=\begin{cases} 2x-1 & x\ge 0 \\ 1+x & x<0 \end{cases}$ باشد، حاصل $f(f(-\cos^2 x))$ را بیابید. $(\cos x\neq 0)$

(راهنمایی: $1-\cos^2 x=\sin^2 x$ و $1-2\sin^2 x=\cos 2x$)

۵۸- اگر $g(x)=x^3-1$ و تابع f به صورت مقابل باشد، عبارت fog را محاسبه کنید.

$$f(x)=\begin{cases} 2x & x\le 1 \\ 4 & 1<x<2 \\ \sqrt[3]{x} & x\ge 2 \end{cases}$$

۵۹- چند تابع $f:w\to w$ وجود دارد که برای هر x متعلق به اعداد حسابی داشته باشیم: **(المپیاد ایران – ۷۶)**
$f(f(n))+f(n)=2n+3$

❋ ۶۰- اگر $f(x)=x+a$ و $g(x)=ax^2+bx+c$ باشند، مقادیر a، b و c را چنان بیابید که داشته باشیم:
$fog(x)=x^2+5x+6$

❋ ۶۱- اگر $f(x)=\sqrt{4-x^2}$ و $g(x)=3x+5$ باشد، دامنه‌ی تابع fog را بدون تشکیل ضابطه تعیین کنید.

۶۲- اگر $f(x)=2x+1$ و $g(x)=3x-2$ و $D_f:[1,4]$ و $D_g:[0,5]$ باشد، آن‌گاه D_{fog} را بیابید.

❋ ۶۳- اگر $f(x)=\dfrac{x}{x-3}$ و $g(x)=\sqrt{x}+1$ باشد، آن‌گاه دامنه‌ی توابع fog و gof را بیابید.

۶۴- اگر $f=\{(-1,3),(0,4),(2,-1),(3,-1)\}$ و تابع g با ضابطه‌ی $g(x)=\dfrac{-|2-x|}{3}$ باشند، با استفاده از تعریف، دامنه‌ی fog را به دست آورید و نمودار fog را رسم کنید.

۶۵- اگر $f(x)=\dfrac{1}{a^2x^2+1}$ و $g(x)=\dfrac{1}{\sqrt{a-x}}$ باشند، به‌طوری که دامنه‌ی gof برابر $\mathbb{R}$ باشد، حدود تغییرات a را بیابید.

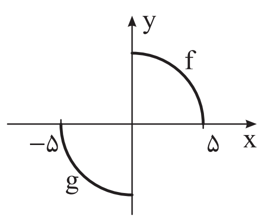
۶۶- فرض کنید $f(x)$ و $g(x)$ دو تابع دلخواه باشند. برای یافتن D_{fog} ، دو راه زیر را پیشنهاد می‌کنیم:

راه اول: برد $g(x)$ را محاسبه کنیم و آن را با دامنه‌ی $f(x)$ اشتراک بگیریم و xهای سازنده‌ی این برد را بیابیم.

راه دوم: ضابطه‌ی fog را می‌یابیم و پس از ساده کردن، تابع به دست‌آمده را تعیین دامنه می‌کنیم.

آیا این دو راه به جواب یکسان می‌رسند؟ اگر آری ثابت کنید و اگر خیر یک مثال بیاورید. کدام راه صحیح است؟

۶۷- اگر نمودارهای f و g به صورت زیر باشند، دامنه‌ی fog را بیابید.



۶۸- اگر $fog(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$ و $g(x)=x-1$ باشند، $f(x)$ را بیابید.

* ۶۹- اگر $f\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)=x^2-3x$ باشد، $f(x)$ را بیابید.

* ۷۰- اگر $f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=x^2+\dfrac{1}{x^2}$ باشد، $f(x)$ را بیابید.

۷۱- اگر $f\left(x-\dfrac{1}{x}\right)=x^3-\dfrac{1}{x^3}$ باشد، $f(x)$ را بیابید.

* ۷۲- اگر $f(\sqrt{2}\sin x)=\cos 2x$ باشد، آن‌گاه $f(\cos x)$ را بیابید. (**راهنمایی:** $\cos 2x=1-2\sin^2 x$)

۷۳- اگر $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}-1}$ و $f(g(x))=\sqrt{x}+1$ باشند، آن‌گاه $g(x)$ را بیابید.

* ۷۴- اگر $fog(x)=2x-1$ و $f(x)=\dfrac{2x+1}{x-5}$ باشند، $g(x)$ را بیابید.

* ۷۵- اگر $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$ و $fog(x)=\dfrac{x^2+2}{x^2+1}$ باشند، مقدار $g(1)$ را بیابید. (سراسری – ۸۴)

۷۶- اگر $f(x)+f(5)=4x+2$ باشد، $f(x)$ را بیابید.

۷۷- اگر $af(x)+bf(-x)=4x+2$ باشد، $f(x)$ را بیابید.

* ۷۸- اگر $f(x)+xf(-x)=x^3+x$ باشد، $f(x)$ را بیابید.

۷۹- اگر $f(\sin x)+2f(\cos x)=2\sin^2 x$ باشد، $f(\sin x)$ را بیابید.

❋ ۸۰- اگر $f(۲x-۱)=\begin{cases} x^۲+۱ & x\geq ۱ \\ \dfrac{x}{۲} & x<۱ \end{cases}$ باشد، $f(x)$ را بیابید.

۸۱- اگر $f(\dfrac{x}{x^۲+۱})=\dfrac{x^۲}{x^۴+۱}$ باشد، $f(x)$ را بیابید.

تابع زوج و فرد

۸۲- در صورتی که مجموعه‌ی $f=\{(-۲,a-۱),(۲,۴),(۷,b-۳),(-۷,۱)\}$ فرد باشد، $a+b$ را بیابید.

۸۳- نوع توابع زیر را از نظر زوج و فرد بودن بررسی کنید.

❋ الف) $f(x)=|x+۳|+|x-۳|$ ❋

❋ ب) $f(x)=|x+۳|-|x-۳|$

❋ پ) $f(x)=x^۳-\sin x$

❋ ت) $f(x)=\sqrt{x^۲+x+۱}-\sqrt{x^۲-x+۱}$

ث) $f(x)=\dfrac{۳^x-۱}{۳^x+۱}$

ج) $f(x)=\log(\dfrac{۲۰-x}{۲۰+x})$

چ) $f(x)=\begin{cases} ۱ & x\geq ۰ \\ -۱ & x<۰ \end{cases}$

❋ ح) $f(x)=\begin{cases} x^۲ & x\geq ۰ \\ -x^۲ & x<۰ \end{cases}$

خ) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt{x}}{۱-x} & x\geq ۰ \\ \dfrac{-\sqrt{-x}}{۱+x} & x<۰ \end{cases}$

❋ د) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x+۳}{۲} & x<-۲ \\ ۲x & -۲<x<۲ \\ \dfrac{۳-x}{۲} & x>۲ \end{cases}$

❋ ذ) $f(x)=\dfrac{5x^2\sin x}{[x]+[-x]+1}$

ر) $f(x)=[\dfrac{|x|}{|x|+1}]$

ز) $f(x)=\dfrac{2}{1+x}+\dfrac{1+x}{1-x}$

❋ ژ) $f(x)=\dfrac{4}{1-x}+\dfrac{3x+7}{x+1}$

❋ س) $f(x)=[x]+\dfrac{1}{2}\qquad (\mathbb{R}-\mathbb{Z})$

۸۴- a را طوری بیابید که $f(x)=\log(\sqrt{a^2x^2+1}+5x)$ یک تابع فرد باشد.

❋ ۸۵- اگر f تابعی زوج باشد، a ، b و c را طوری تعیین کنید که $y=af(bx)+c$ نیز زوج باشد.

❋ ۸۶- نشان دهید مبداء مختصات، مرکز تقارن $y=\log\dfrac{x+1}{x-1}$ می‌باشد.

❋ ۸۷- مقادیر A و B را طوری بیابید که تابع $f(x)=x^2+(A-1)x$ زوج و تابع $g(x)=(B+2)x^2+\sin x$ فرد باشد.

❋ ۸۸- اگر تابع $f(x)=|x+a|+2|x+b|+|x+c|$ زوج باشد، مقدار $a+b+c$ را بیابید.

۸۹- اگر تابع $f(x)=\begin{cases} x^2+2x+3 & x\geq 4 \\ 2|x+3|+a|x+b| & -4<x<4 \\ cx^2+dx+e & x\leq -4 \end{cases}$ زوج باشد، $a+b+c+d+e$ را بیابید.

(آزاد – ۸۷)

۹۰- تابع $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2-2}$ را به صورت مجموع یک تابع زوج و یک تابع فرد نوشته‌ایم. ضابطه‌ی تابع زوج را بنویسید.

❋ ۹۱- ابتدا نمودار $f\times g$ را رسم کنید سپس زوج یا فرد بودن آن را بررسی کنید.

۹۲- اگر $h(x)=\dfrac{g(x)}{f^2(x)+1}$ باشد و اگر $D_f=D_g=\mathbb{R}$ باشند، تعیین کنید که تحت چه شرایطی $h(x)$ تابعی فرد می‌گردد.

۹۳- اگر f یک تابع فرد غیرصفر باشد، نوع توابع زیر را بررسی کنید.

الف) $h(x)=f(|x|)$

❋ ب) $h(x)=f^2(x)+1$

پ) $h(x)=-f(-x)$

❈ ت) $h(x)=|f(x)|$

❈ ث) $h(x)=\frac{۱}{-f(x)}$

ج) $h(x)=۲f(x-۱)$

❈ چ) $h(x)=f(\frac{۱}{x})$

❈ ح) $h(x)=xf(x^{۲}+۱)+x^{۳}$

۹۴- اگر f تابعی زوج و g تابعی فرد باشد و $D_f=D_g=\mathbb{R}$ ، آن‌گاه نوع توابع زیر را بررسی کنید.

❈ الف) $f+g=$

❈ ب) $f+g^{۲}=$

❈ پ) $f.g=$

❈ ت) $f.|g|=$

❈ ث) $fog=$

ج) $gof=$

چ) $fof=$

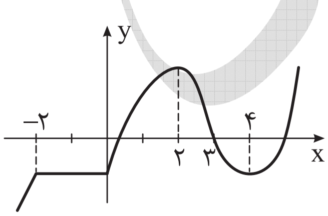
❈ ح) $gog=$

خ) $(f+|g|)of=$

❈ د) $(\frac{f+g}{g})of=$

تابع صعودی و نزولی

۹۵- شکل مقابل نمودار $y=f(x)$ است. بازه‌هایی که تابع در آن‌ها صعودی است را تعیین کنید.



❈ ۹۶- با رسم شکل تابع زیر، بازه‌هایی که تابع در آن‌ها صعودی، نزولی یا ثابت است را مشخص کنید.

$$f(x)=\begin{cases} ۲x+۱ & x\geq ۱ \\ ۳ & -۱\leq x\leq ۱ \\ -۳x+۵ & x<-۱ \end{cases}$$

۹۷- با رسم شکل توابع زیر، صعودی، نزولی یا ثابت بودن آن‌ها را در بازه‌های مشخص، تعیین کنید.

الف) $f(x)=-||x|-۲|$

ب) $f(x)=\frac{x}{|x|}$

پ) $f(x)=x|x-۱|$

※ ت) $f(x)=|x|+|x-۱|$

※ ث) $f(x)=\sqrt{x-۱}+۲$

※ ج) $f(x)=\frac{-۱}{x}+۳$

※ چ) $f(x)=۴x+۳|x|$

※ ۹۸- نموداری رسم کنید که تمام ویژگی‌های زیر را داشته باشد.

الف) $f(۲)=۱$

ب) روی اعداد نامنفی ثابت باشد.

پ) روی بازه‌ی $[-۳,۰]$ صعودی اکید باشد.

ت) روی بازه‌ی $(-\infty,-۳]$ نزولی اکید باشد.

۹۹- با استفاده از ضابطه، صعودی یا نزولی بودن توابع زیر را بررسی کنید.

الف) $f(x)=(x-۲)^۲-۱$ $\qquad x\in(-\infty,۲]$

※ ب) $f(x)=\frac{۱}{x^۲+۵}$ $\qquad x\in(-\infty,۰]$

پ) $f(x)=\frac{x-۱}{x+۱}$ $\qquad x\in(-۱,+\infty)$

※ ت) $f(x)=\log(۳x-۱)$ $\qquad x\in(\frac{۱}{۳},+\infty)$

ث) $f(x)=\sin ۵x$ $\qquad x\in(-\frac{\pi}{۱۰},\frac{\pi}{۱۰})$

※ ج) $f(x)=x^۳+۳x^۲+۳x$ $\qquad x\in\mathbb{R}$

※ ۱۰۰- با محدود کردن دامنه‌ی هر یک از توابع زیر روی یک بازه تابعی یک‌به‌یک بسازید. (**بزرگ‌ترین دامنه‌ی ممکن**)

الف) $f(x)=\sin x$

ب) $f(x)=x^۲-۲x+۳$

پ) $f(x)=|x+۱|$

۱۰۱- اگر $f(x)$ تابعی صعودی و همواره منفی باشد، نوع توابع زیر را بررسی کنید.

❋ الف) $f^{۲}(x)$

❋ ب) $\frac{۱}{f(x)}$

پ) $|f(x)|+۱$

❋ ت) $\sqrt[۳]{f(x)}$

ث) $\frac{f(x)-۱}{f(x)-۲}$

ج) $|f(x)-۲|$

۱۰۲- اگر f اکیداً نزولی باشد. به جای ◯ علامت > یا < بگذارید.

الف) $f(x^{۲}+۱) \bigcirc f(x^{۲}-۱)$

❋ ب) $f(۱-\sqrt{x}) \bigcirc f(\sqrt{x})$

۱۰۳- فرض کنید $f:[۰,+\infty)\to\mathbb{R}$ دارای این خاصیت است که $f(x)-۳x$ و $f(x)-x^{۳}$ صعودی هستند. نشان دهید $f(x)-x^{۲}-x$ نیز صعودی است. **(المپیاد ایران – ۸۳)**

۱۰۴- ثابت کنید هر تابع یکنوای اکید، یک‌به‌یک است.

تابع یک‌به‌یک

۱۰۵- اگر $f=\{(۳,۲),(a,۵),(۳,a^{۲}-a),(b,۲),(-۱,۴)\}$ تابعی یک‌به‌یک باشد، $f^{-۱}(a)$ را بیابید.

❋۱۰۶- اگر $f=\{(۳,۴),(a^{۲}-۱,۴),(b,۵),(۶,۵)\}$ باشد، $a+b$ را بیابید.

۱۰۷- یک‌به‌یک بودن توابع زیر را بررسی کنید.

❋ الف) $f(x)=x^{۲}+x+۱$

ب) $f(x)=\sqrt[۳]{x^{۳}+۱}$

❋ پ) $f(x)=۳^{x+۲}-۱$

❋ ت) $f(x)=\log_{۲}^{x^{۳}-۱}$

ث) $f(x)=x|x|$

❋ ج) $f(x)=\frac{۳x-۱}{x+۱}$

چ) $f(x)=\frac{|x|-۲}{|x|+۱}$

❋ ح) $f(x)=\frac{x}{|x|+۱}$

❋ خ) $f(x)=\sin\sqrt{x}$

د) $f(x)=x^۳+۳x$

❋ ذ) $f(x)=x^۳-۳x$

❋ ر) $f(x)=\log(x^۲+۵)$

❋۱۰۸- با رسم شکل نشان دهید تابع $f(x)=\begin{cases}x+۱ & x<۰\\ x^۲+۱ & x\geq ۰\end{cases}$ تابعی یک‌به‌یک است.

۱۰۹- وارون‌پذیری تابع $f(x)=\begin{cases}۳x+۱ & x\geq ۰\\ x^۲-۱ & x<۰\end{cases}$ را بررسی کنید.

۱۱۰- اگر $f(x)=\begin{cases}۴-x^۲ & x\leq ۰\\ ۲x+m & x>۰\end{cases}$ تابعی یک‌به‌یک باشد، حدود m را بیابید.

❋۱۱۱- نشان دهید دو تابع $f(x)=۴x^۳+۳$ و $g(x)=\sqrt[۳]{\frac{x-۳}{۴}}$ وارون هم‌دیگرند.

۱۱۲- ضابطه‌ی تابع وارون توابع زیر را بیابید.

❋الف) $f(x)=\frac{۲x+۱}{x-۲}$

❋ ب) $f(x)=۴x^۳-۱$

پ) $f(x)=\sqrt{۱+\sqrt{x}}$

❋ ت) $f(x)=\frac{۳-x}{۲+x}$

ث) $f(x)=\frac{۲\sqrt{x}-۱}{\sqrt{x}+۳}$

❋ ج) $y=\sqrt[۳]{\frac{۳x-۵}{۲x+۱}}$

چ) $y=x^۳+۳x^۲+۳x+۵$

❋ ح) $y=\frac{۱}{\sqrt{x-|x|}}$

خ) $y=x^۴-۲x^۲+۱ \qquad x\in(۱,+\infty)$

❋ د) $y=\sqrt{\frac{۱}{x}+۲}$

۱۱۳- در تابع $f(x) = -x + \sqrt{-2x}$ مقدار $f^{-1}(4)$ را بیابید. (سراسری – ۸۸)

* ۱۱۴- اگر $f(x) = 2x + 1$ و $g(x) = x - 1$ باشند، ضابطه‌ی $fog^{-1}(x)$ را بیابید.

۱۱۵- اگر ضابطه‌ی تابع f به صورت $f(x) = \sqrt{2 - \sqrt{x-2}}$ باشد، نشان دهید تابع فوق در دامنه‌ی تعریفش معکوس‌پذیر است و سپس ضابطه‌ی f^{-1} را با دامنه و برد آن تعیین کنید.

* ۱۱۶- بررسی کنید تابع زیر صعودی یا نزولی است و سپس ضابطه‌ی تابع معکوس را بیابید و نمودار f و f^{-1} را در یک دستگاه مختصات رسم کنید. $f(x) = x^2 - 3x \qquad (x \le \frac{3}{2})$

۱۱۷- اگر مقدار $A = \{0,1,4,9\}$ و $f = \{(x, \sqrt{x}), x \in A\}$ باشد، مجموعه‌ی اعضای برد $f^{-1}o(f+f)$ را بیابید.

* ۱۱۸- اگر $f^{-1}(x) = x + \sqrt{x+1}$ باشد، تابع $f(x)$ محور طول‌ها را در چه نقطه‌ای قطع می‌کند؟

۱۱۹- تابع $f(x) = 2x - \frac{1}{x}$ با معکوسش در چه نقطه‌ای متقاطع‌اند؟

* ۱۲۰- در تابع $f(x) = \frac{2x+1}{x+d}$ مقدار d را طوری بیابید که $f^{-1}(x) - f(x) = 0$ گردد.

۱۲۱- نشان دهید $y = x$ محور تقارن دو تابع $y = \sqrt[3]{x+1}$ و $y = x^3 - 1$ می‌باشد.

۱۲۲- فرض کنید $f: A \to B$ معکوس‌پذیر باشد و می‌دانیم $fof^{-1}(x) = x$ و $f^{-1}of(x) = x$ ، آیا دو تابع $f^{-1}of(x)$ و $fof^{-1}(x)$ مساوی هستند؟

۱۲۳- اگر $f: [-2,2] \to [1,4]$ معکوس‌پذیر باشد، نمودارهای $fof^{-1}(x)$ و $f^{-1}of(x)$ را رسم کنید.

* ۱۲۴- فرض کنید $f(x) = 7x - 5$ و $g(x) = 2 - x$ باشند. آن‌گاه:

الف) $f^{-1}(x)$ و $g^{-1}(x)$ را محاسبه کنید.

ب) $g^{-1}of^{-1}(x)$ را محاسبه کنید.

پ) معکوس $fog(x)$ را محاسبه کنید.

ت) دو تابع قسمت‌های « ب » و « پ » را با هم مقایسه کنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

دوره‌ی تناوب و جزء صحیح

۱۲۵- اگر دوره‌ی تناوب تابع $y = f(x)$ برابر T باشد، دوره‌ی تناوب تابع $y = kf(ax+b)$ را بیابید.

۱۲۶- دوره‌ی تناوب توابع زیر را بیابید.

الف) $f(x) = \tan 3x$

ب) $f(x) = 4\cos 2x + \sin^3 5x$

* پ) $f(x) = |\cos 5x| + 9|\tan \frac{2x}{3}|$

ت) $f(x)=\frac{2\sin x+\cos x}{\sin x-3\cos x}$

ث) $f(x)=\cot 3x-\tan 3x$

ج) $f(x)=2x-2[x]$ ❋

چ) $f(x)=2x-[2x]$ ❋

ح) $f(x)=(-1)^{[2x]}$

خ) $f(x)=(-1)^{[x]}.\cos\pi x$

۱۲۷- دوره‌ی تناوب تابع $f(x)=[x]+[-x]$ را بیابید و بررسی کنید که اگر $h(x)=[mx]+[-mx]$ گردد، دوره‌ی تناوب چه تغییری می‌کند؟

۱۲۸- می‌دانیم f تابعی متناوب است و داریم $f(x+2)=f(x-3)$ ، دوره‌ی تناوب اصلی تابع را بیابید.

۱۲۹- کدام‌یک از توابع زیر متناوب هستند؟

الف) $f(x)=\sin\sqrt{x}$

ب) $f(x)=\cos\pi x$ ❋

پ) $f(x)=\tan\pi x+\cot x$

ت) $f(x)=\sqrt{\sin x}$

ث) $f(x)=\cos\frac{1}{x}$

ج) $f(x)=\frac{1}{\cos x}$ ❋

چ) $f(x)=\sin[x]$ ❋

ح) $f(x)=\sin\pi[x]$

خ) $f(x)=[\sin x+\cos x]$ ❋

د) $f(x)=\frac{x}{6}-[\frac{x}{2}]+[\frac{x}{3}]$

ذ) $f(x)=|\sin 2x|+|\cos 2x|$

ر) $f(x)=x^2\sin x$

۱۳۰- ثابت کنید تابع $f(x)=\tan\frac{3x}{7}$ متناوب بوده و دوره‌ی تناوب آن $T=\frac{7\pi}{3}$ می‌باشد.

❋ ۱۳۱- متناوب بودن تابع $f(x)=\begin{cases}1 & x\in\mathbb{Q}\\ 0 & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$ را بررسی کنید.

❋ ۱۳۲- آیا تابع ثابت، یک تابع متناوب است؟ چرا؟

۱۳۳- متناوب بودن تابع‌های $f(x)=\tan x.\cot x$ و $g(x)=\sin^2 x+\cos^2 x$ را بررسی کنید.

۱۳۴- جزء صحیح عبارت $(1+\sqrt{2})^{3}$ را بیابید.

۱۳۵- اگر $(\sqrt{2}+1)^{6}+(\sqrt{2}-1)^{6}=198$ باشد، مقدار $[(\sqrt{2}+1)^{6}]$ را بیابید.

※ ۱۳۶- اگر $A=1-x[\frac{1}{x}]$ باشد، آن‌گاه حدود A را بیابید.

۱۳۷- حدود عبارت $A=x-\frac{1}{5}[5x+3]$ را بیابید.

۱۳۸- اگر $f(x)+[f(x)]=2[x^{2}+\frac{1}{2}]$ باشد، تابع $f(x)$ را بیابید.

※ ۱۳۹- دامنه‌ی تابع $f(x)=\sqrt{|x|-[x]}$ را بیابید.

۱۴۰- تابع f به گونه‌ای تعریف شده است که $[f(x)]^{2}=1$ چند تابع از این نوع وجود دارد؟

(المپیاد دبیرستان‌های بلژیک)

۱) هیچ ۲) یکی ۳) دو تا ۴) چهار تا ۵) بی‌نهایت

۱۴۱- دامنه‌ی توابع زیر را بیابید.

الف) $f(x)=\frac{3x-5}{x-[x]}$

※ ب) $f(x)=\sqrt{[x]+[-x]}$

پ) $f(x)=\frac{\sqrt{x^{2}-9}}{[x]+[-x]}$

※ ت) $f(x)=\sqrt{[x]+[-x]-1}$

ث) $f(x)=\sqrt{4-[x]}$

ج) $f(x)=\sqrt{[x]^{2}-3[x]+2}$

※ چ) $f(x)=\frac{\sqrt{x^{2}-1}}{[x]-1}$

ح) $f(x)=\tan\frac{\pi[x]}{2}$

※ خ) $f(x)=\log[x]$

※ د) $f(x)=\frac{\sqrt{4-x^{2}}}{[x]}$

۱۴۲- نمودار توابع زیر را در بازه‌های خواسته‌شده رسم کنید.

الف) $f(x)=3[\frac{x}{2}]$ $[-2,4]$

ب) $f(x)=2x-[2x]$ $[-1,1]$

❋ پ) $f(x)=[-x]$ $[-۱,۲]$

❋ ت) $f(x)=x[x]$ $[-۱,۲]$

ث) $f(x)=\dfrac{[x]}{x}$ $[-۱,۲]$

❋ ج) $f(x)=[۲x]+[-۲x]$ $[-۱,۲]$

چ) $f(x)=[x^۲]$ $[۰,۲)$

ح) $f(x)=[\sin x]$ $[۰,۲\pi]$

۱۴۳- وارون‌پذیری تابع $f(x)=x+[x]$ را با رسم شکل بررسی کنید و وارون آن را به صورت یک تابع تک ضابطه‌ای بیابید.

❋ ۱۴۴- وارون تابع $f(x)=x+۴[x]$ را بیابید.

❋ ۱۴۵- ثابت کنید $[x+y]\geq[x]+[y]$.

❋ ۱۴۶- نمودار $f(x)=[\frac{x}{۲}]+[x]$ را در بازه‌ی $[-۱,۱]$ رسم کنید.

۱۴۷- اگر $x^۲+x<۰$ باشد، آن‌گاه $[x]+[x^۲]+[x^۳]+[x^۴]$ را بیابید. (سراسری خارج کشور – ۸۸)

۱۴۸- اگر $[x^۲+x]=-۱$ باشد، آن‌گاه $[x^{۲۰}]$ را بیابید. (سراسری – ۸۸)

۱۴۹- اگر تابع $f(x)=\dfrac{۱}{[\cos\pi x]}$ باشد، دامنه‌ی تابع را بیابید. (سراسری – ۸۹)

❋ ۱۵۰- دو تابع با ضابطه‌ی $f(x)=[x]+[-x]$ و $g(x)=x^۲+x-۲$ مفروض‌اند. اگر $g(f(x))=-۲$ باشد، مجموعه مقادیر x کدام است؟ (سراسری – ۸۹)

۱۵۱- اگر P یک عدد اول باشد، نمودار $[x][y]=P$ را رسم کنید و آن را توصیف نمایید.

۱۵۲- در مورد زوج یا فرد بودن $f(x)=[\dfrac{-۲x}{n+x}]+[\dfrac{n+x}{n-x}]$ بحث کنید.

❋ ۱۵۳- اگر $x=[x]+P$ و $-x=[-x]+P'$ آن‌گاه حاصل $P+P'$ را بیابید.

❋ ۱۵۴- اگر $f(x)=\sqrt{x-۲}+\sqrt{۲-x}$ و $g(x)=[x+۱]$ باشند. دامنه‌ی تابع fog را بیابید.

❋ ۱۵۵- معادلات زیر را حل کنید.

الف) $[x]+[-x]=۴$

ب) $[۲x]=[x]+۱$

پ) $\log[x]=۱$

ت) $[x]^۲+[x]-۲=۰$

❋ ۱۵۶- برد تابع $f(x)=\sqrt{[\frac{x}{۲}]+[-\frac{x}{۲}]}$ را بیابید.

تست‌های کنکور سراسری ۱۳۹۰

۱۵۷- تابع $f=\{(۲,۱),(۳,۲),(۴,۵),(۱,۷)\}$ و $g=\{(۱,۲),(۳,۱),(a,۳),(b,۱)\}$ مفروض‌اند. اگر $(۴,۲)\in fog$ و $(۴,۱)\in gof$ باشند، دوتایی (a,b) کدام است؟

۱) $(۳,۴)$ ۲) $(۴,۳)$ ۳) $(۴,۵)$ ۴) $(۵,۴)$

۱۵۸- اگر $f(x)=-x+[x]$ و $g(x)=۲^x$ ، آن‌گاه برد تابع gof کدام است؟

۱) $\left(\frac{۱}{۲},۱\right]$ ۲) $\left[\frac{۱}{۲},۱\right)$ ۳) $(۱,۲]$ ۴) $[۱,۲)$

* ۱۵۹- اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $x(۵x+۳)=۲$ باشند، به ازای کدام مقدار k مجموعه جواب‌های معادله $۴x^۲-kx+۲۵=۰$ به صورت $\left\{\frac{۱}{\alpha^۲},\frac{۱}{\beta^۲}\right\}$ است؟

۱) ۲۷ ۲) ۲۸ ۳) ۲۹ ۴) ۳۱

انیشتین :

نگران مشکلاتی که در ریاضیات دارید ، نباشید . به شما اطمینان می‌دهم مشکلات من در این زمینه عظیم‌تر است .

پاسخ فصل دوم

تـابـع

۲- الف) برای آن‌که بدانیم تعداد توابع f چندتاست، باید بدانیم برای هر یک از $f(a_1)$ ، $f(a_2)$ ، ... و $f(a_m)$ چند حالت موجود است: $f(a_1)$ می‌تواند هر کدام از اعداد b_1،b_2 ، ... ، b_m باشد. پس برای $f(a_1)$ ، m حالت موجود است. $f(a_2)$ نیز می‌تواند به هر یک از b_1،b_2 ، ... ، b_m نظیر شود. پس آن هم m حالت دارد و ... و $f(a_m)$ نیز m حالت دارد. پس طبق اصل ضرب $\underbrace{m\times m\times\ldots\times m}_{\text{n تا}}=m^n$ تابع موجود است.

ب) $f(a_1)$، یک حالت دارد. چون فقط می‌تواند b_1 باشد. ولی $f(a_2)$ ، ... ، $f(a_n)$ محدود نیستند و هر کدام m حالت دارند. پس: $\underbrace{m\times m\times\ldots\times m}_{\text{n−۱ حالت}}=m^{n-1}$

پ) توابع ثابت عبارتند از: $f(x)=b_1$ و $f(x)=b_2,\ldots,f(x)=b_m$. پس m تا هستند.

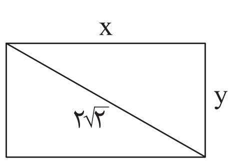
ت) $f(a_1)\neq b_1$ پس $f(a_1)$، $m-1$ حالت دارد و بقیه‌ی $f(a_2),\ldots,f(a_n)$ هر کدام m حالت دارند. پس:

$$(m-1)(m)(m)\ldots(m)=m^{n-1}\times(m-1)=m^n-m^{n-1}$$

۳-
$$x+y=20\Rightarrow y=20-x$$
$$f(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\xrightarrow{\text{با فرض } x<y} f(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{20-x}$$

۴-
$$\frac{DE}{BC}=\frac{AK}{AL}\Rightarrow\frac{y}{10}=\frac{20-x}{20}\Rightarrow y=\frac{20-x}{2}$$
$$S(x)=xy=x\left(\frac{20-x}{2}\right)=\frac{20x-x^2}{2}$$

۵-



$$x^2+y^2=(2\sqrt{2})^2\Rightarrow x^2+y^2=8\Rightarrow y^2=8-x^2$$
$$\Rightarrow y=\sqrt{8-x^2}$$
$$S=xy=x\sqrt{8-x^2}$$

۷-
$$S=\frac{1}{2}\,\text{(ارتفاع) (قاعده)}=\frac{1}{2}(y)(2)=\frac{1}{2}\sqrt{1-x^2}\times 2=\sqrt{1-x^2}$$

-۱۰ $f(x)=(K+3)x^2-4x+K \rightarrow$ تابع درجه‌ی ۲ طول رأس : $x=-\frac{b}{2a}=-\frac{-4}{2(K+3)}=\frac{2}{K+3}$

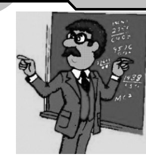
عرض رأس : $y=(K+3)(\frac{2}{K+3})^2-4(\frac{2}{K+3})+K=0 \Rightarrow \frac{4}{K+3}-\frac{8}{K+3}+K=0$

$$\Rightarrow \frac{-4}{K+3}+K=0 \Rightarrow \frac{-4+K^2+3K}{K+3}=0$$

$$\Rightarrow K^2+3K-4=0 \Rightarrow \left|\begin{array}{l} K=1 \\ K=-4 \end{array}\right.$$

به ازای $K=1$ ضریب x^2 مثبت بوده و تابع دارای min (کمینه) می‌گردد و به ازای $K=-4$ ضریب x^2 منفی گشته و max (بیشینه) پیدا می‌کند. پس فقط $K=-4$ قابل قبول است.

نکته:



مقدار max و min تابع $y=ax^2+bx+c$ **برابر** $-\frac{\Delta}{4a}$ **می‌باشد.**

-۱۱

ب) $|x|+|y^2-1|=0 \xrightarrow[\text{صفر شده است}]{\text{جمع دو مقدار نامنفی}} \begin{cases} |x|=0 \Rightarrow x=0 \\ |y^2-1|=0 \end{cases} \Rightarrow \{(0,1),(0,-1)\}$

به ازای یک مقدار x ، دو تا y داریم. پس رابطه تابع نیست.

پ) $|x+y|=3 \Rightarrow x+y=\pm 3 \Rightarrow \begin{cases} y=-x+3 \\ y=-x-3 \end{cases}$ پس تابع نیست.

ث) $x=\sin y+1 \xrightarrow[x=0]{\text{به‌طور مثال}} 0=\sin y+1 \Rightarrow \sin y=-1 \begin{cases} y=\frac{3\pi}{2} \\ y=-\frac{\pi}{2} \end{cases}$

به ازای یک مقدار x، چند y داریم. پس رابطه تابع نیست.

ج) $|y|=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{x^2-1}$

باتوجه به دامنه‌ی رابطه که $x=\pm 1$ می‌باشد، برد تابع فقط صفر است. یعنی $f:\{(1,0),(-1,0)\}$

پس رابطه متعلق به یک تابع می‌باشد.

ح) $10^x+10^y=10 \Rightarrow 10^y=10-10^x \Rightarrow y=\log(10-10^x)$

برای اثبات تابع بودن رابطه داریم:

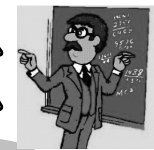
$$x_1=x_2 \Rightarrow 10^{x_1}=10^{x_2} \Rightarrow -10^{x_1}=-10^{x_2} \Rightarrow 10-10^{x_1}=10-10^{x_2}$$

$$\Rightarrow \log(10-10^{x_1})=\log(10-10^{x_2}) \Rightarrow y_1=y_2$$

د) $f(x)=\begin{cases}3x+5 & x>0\\ x-2 & x<1\end{cases}$

شرط $x>0$ و $x<1$ با هم اشتراکی برابر $0<x<1$ دارند. پس عبارت تابع نمی‌باشد.

نکته:



در توابع چند ضابطه‌ای هرگاه شرط‌ها با هم اشتراک داشته باشند، رابطه، تابع نیست مگر در نقاط مشترک yهای همه ضابطه‌ها با هم برابر گردند.

۱۲- $\cos 2y-5x=1 \Rightarrow x=\dfrac{\cos 2y-1}{5}$

در نتیجه این رابطه یک تابع از y به x (برحسب y) را مشخص می‌کند. یعنی به ازای هر مقداری که به y می‌دهیم فقط یک مقدار x پیدا می‌شود.

دامنه‌ی این تابع برابر $\mathbb{R}$ است و برای برد آن داریم:

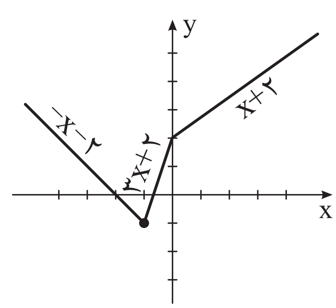
$$-1\le \cos 2y\le 1 \Rightarrow -2\le \cos 2y-1\le 0 \Rightarrow -\frac{2}{5}\le \frac{\cos 2y-1}{5}\le 0 \Rightarrow \text{برد}\in[-\frac{2}{5},0]$$

۱۳- برای این‌که این رابطه تابع گردد، باید شرط‌ها با هم اشتراک نداشته باشند و اگر در یک نقطه اشتراک داشته باشند yهای آن‌ها با هم برابر گردد.

$$\left.\begin{cases}x=0 \Rightarrow 2x+\dfrac{x-1}{|x|+1}=0+\dfrac{0-1}{0+1}=-1\\ x=0 \Rightarrow b+2x-3=b+0-3=b-3\end{cases}\right\} \Rightarrow b-3=-1 \Rightarrow b=2$$

۱۶- $f(x)=2|x+1|-|x|$

		-1		0	
x	$-$		$-$	0	$+$
$x+1$	$-$	0	$+$		$+$
	$-2(x+1)+x$		$2(x+1)+x$		$2(x+1)-x$
	$y=-x-2$		$y=3x+2$		$y=x+2$



$$f(x)=\begin{cases}-2(x+1)-(-x)=-2x-2+x=-x-2 & x<-1\\ 2x+2+x=3x+2 & -1\le x\le 0\\ 2x+2-x=x+2 & x>0\end{cases}$$

دامنه‌ی این تابع $\mathbb{R}$ و برد آن $y\ge -1$ می‌باشد.

-۱۹

ث) $f(x)=\sqrt{x-۲\sqrt{x+۱}} \Rightarrow \begin{cases} x+۱\geq ۰ \Rightarrow x\geq -۱ \\ x-۲\sqrt{x+۱}\geq ۰ \Rightarrow x\geq ۲\sqrt{x+۱} \Rightarrow x^۲\geq ۴(x+۱) \\ \qquad \Rightarrow x^۲ \geq ۴x+۴ \end{cases}$

$$x^۲-۴x-۴\geq ۰ \Rightarrow x^۲-۴x-۴=۰ \Rightarrow \begin{cases} x_۱=۲-۲\sqrt{۲} \\ x_۲=۲+۲\sqrt{۲} \end{cases}$$

	$۲-۲\sqrt{۲}$		$۲+۲\sqrt{۲}$	
$x^۲-۴x-۴$	+	۰ −	۰	+
	ج			ج

یعنی نتیجه $x^۲-۴x-۴\geq ۰$ برابر است با $(-\infty,۲-۲\sqrt{۲})\bigcup(۲\sqrt{۲},+\infty)$ ولی با توجه به نامعادله‌ی $x\geq ۲\sqrt{x+۱}$ و با توجه به این‌که جواب رادیکال مثبت است، پس x که از آن بزرگ‌تر است حتماً مثبت است و به‌طور خلاصه می‌توان گفت:

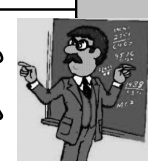
$$D_f:\{x\geq -۱\}\bigcap(\{x\leq ۲-۲\sqrt{۲}\}\bigcup\{x\geq ۲+۲\sqrt{۲}\})\bigcap\{x\geq ۰\} \rightleftharpoons \{x\geq ۲+۲\sqrt{۲}\}$$

ج) $f(x)=\sqrt{\frac{-۱}{x-|x|}} \Rightarrow \frac{-۱}{x-|x|}\geq ۰ \Rightarrow x-|x|<۰ \Rightarrow |x|>x \Rightarrow x<۰$

چ) $f(x)=\cos\sqrt{x-|x|} \Rightarrow x-|x|\geq ۰ \Rightarrow x\geq |x| \Rightarrow \begin{cases} x>|x| \Rightarrow \varnothing \\ x=|x| \Rightarrow x\geq ۰ \end{cases} \Rightarrow D_f:\{x\geq ۰\}$

ح) $f(x)=\sqrt{\sin x} \Rightarrow \sin x\geq ۰ \Rightarrow$ طبق قاعده‌ی هستک

نکته:



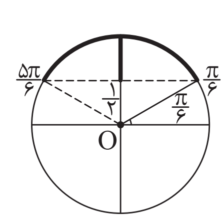
طبق قاعده‌ی هستک در ربع اول همه‌ی توابع مثبت‌اند و در ربع دوم فقط سینوس مثبت و در ربع سوم تانژانت و کتانژانت و در ربع چهارم فقط کوسینوس مثبت است.

یعنی در هر ربع، حرف اول تابع‌های مثبت را نوشتیم $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \sin x\geq ۰ \Rightarrow ۰\leq x\leq \pi \Rightarrow ۲k\pi\leq x\leq ۲k\pi+\pi$$

خ) $f(x)=\sqrt{۲\sin x-۱} \Rightarrow ۲\sin x-۱\geq ۰ \Rightarrow ۲\sin x\geq ۱ \Rightarrow \sin x\geq \frac{۱}{۲}$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{۶}\leq x\leq \frac{۵\pi}{۶} \Rightarrow ۲k\pi+\frac{\pi}{۶}\leq x\leq ۲k\pi+\frac{۵\pi}{۶}$$



-۲۱ $mx^۲+۴x+۱\geq ۰ \Rightarrow \begin{cases} \Delta\leq ۰ \Rightarrow (۴)^۲-۴(m)\leq ۰ \Rightarrow ۱۶-۴m\leq ۰ \Rightarrow m\geq ۴ \\ m>۰ \end{cases}$

$$\Rightarrow \{m\geq ۴\}\bigcap\{m>۰\}=\{m\geq ۴\}$$

-۲۳

الف) $\begin{cases} f(x)=\sqrt{x^{۲}} \\ g(x)=x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D_f:\mathbb{R} \\ D_g:\mathbb{R} \end{cases} ,\sqrt{x^{۲}}=|x|\neq x \Rightarrow f\neq g$

ت) $\begin{cases} f(x)=\log x^{۲} \\ g(x)=۲\log x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^{۲}>۰ \Rightarrow x\in\mathbb{R}-\{۰\} \Rightarrow D_f:\ \mathbb{R}-\{۰\} \\ x>۰ \Rightarrow x\in(۰,+\infty) \Rightarrow D_g:(۰,+\infty) \end{cases} \Rightarrow$ دو تابع مساوی نیستند.

ث) $\begin{cases} f(x)=\tan x.\cot x \\ g(x)=\sin^{۲}x+\cos^{۲}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D_f=\mathbb{R}-\{\frac{k\pi}{۲}\} \\ D_g=\mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow$ دو تابع مساوی نیستند.

چ) $\begin{cases} f(x)=\sin x \\ g(x)=\sqrt{۱-\cos^{۲}x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D_f=\mathbb{R} \\ D_g=\mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow \sqrt{۱-\cos^{۲}x}=\sqrt{\sin^{۲}x}=|\sin x| \Rightarrow f\neq g$

د) $\begin{cases} f(x)=(x-۱)\sqrt{۱-x} \\ g(x)=\sqrt{(۱-x)^{۳}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D_f:x\leq ۱ \\ D_g:x\leq ۱ \end{cases} \Rightarrow \sqrt{(۱-x)^{۳}}=\sqrt{(۱-x)^{۲}(۱-x)}$

$=|۱-x|\sqrt{۱-x}=(۱-x)\sqrt{۱-x} \Rightarrow f\neq g$

ذ) $\begin{cases} f(x)=\sqrt{x}.\sqrt{-x} \\ g(x)=\sqrt{-x^{۲}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D_f:\begin{cases} x\geq ۰ \\ -x\geq ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\geq ۰ \\ x\leq ۰ \end{cases} \Rightarrow D_f=\{۰\} \\ D_g:-x^{۲}\geq ۰ \Rightarrow x^{۲}\leq ۰ \Rightarrow D_g=\{۰\} \end{cases} \Rightarrow$ با توجه به این‌که برد تابع نیز فقط $y=۰$ است پس دو تابع مساوی‌اند.

-۲۴

$$g(x)=\begin{cases} \frac{۴x^{۲}-۱}{۲x+۱} & x\neq -\frac{۱}{۲} \\ ۱-K & x=-\frac{۱}{۲} \end{cases} \Rightarrow g(x)=\begin{cases} ۲x-۱ & x\neq -\frac{۱}{۲} \\ ۱-K & x=-\frac{۱}{۲} \end{cases}$$

اگر در این سوال $f(x)=g(x)$ است، پس باید در $x=-\frac{۱}{۲}$ نیز این دو تابع با هم مساوی باشند. یعنی:

$$f(-\frac{۱}{۲})=g(-\frac{۱}{۲}) \Rightarrow ۲(-\frac{۱}{۲})-۱=۱-K \Rightarrow -۲=۱-K \Rightarrow K=۳$$

-۲۶

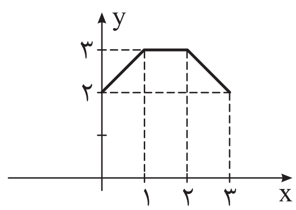
$$g(x)=f(x) \Rightarrow \sqrt{ax^{۲}+۱}-bx^{۲}=\frac{۱}{۳x+\sqrt{۹x^{۲}+۱}} \Rightarrow \sqrt{ax^{۲}+۱}-bx$$

$$=\frac{۱}{۳x+\sqrt{۹x^{۲}+۱}}\times\frac{۳x-\sqrt{۹x^{۲}+۱}}{۳x-\sqrt{۹x^{۲}+۱}}=\frac{۳x-\sqrt{۹x^{۲}+۱}}{۹x^{۲}-۹x^{۲}-۱}=\sqrt{۹x^{۲}+۱}-۳x$$

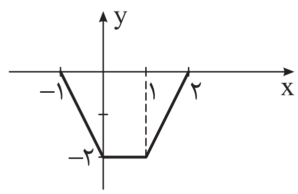
$$\Rightarrow \sqrt{ax^{۲}+۱}-bx^{۲}=\sqrt{۹x^{۲}+۱}-۳x \Rightarrow \begin{cases} a=۹ \\ b=۳ \end{cases}$$

-۲۷

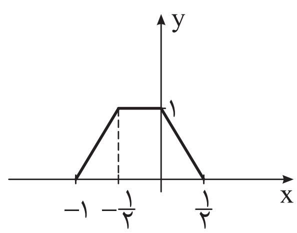
الف)



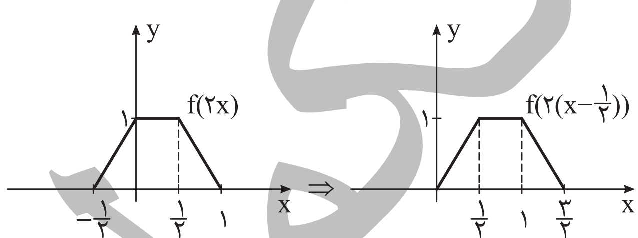
ت)



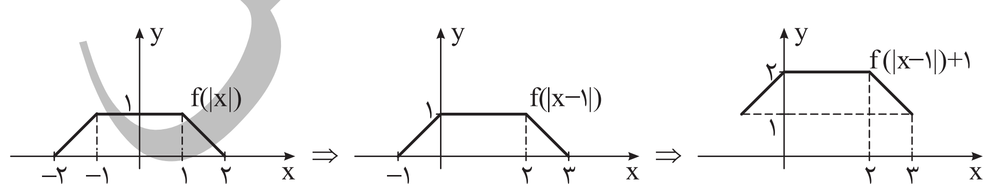
ث)



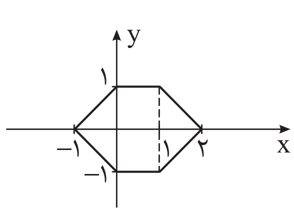
ح) $y=f(۲x-۱)\Rightarrow y=f(۲(x-\frac{۱}{۲}))$



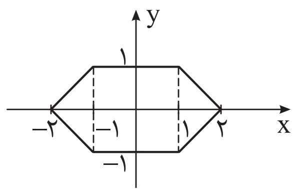
ذ)



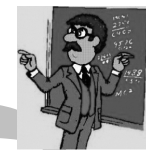
ر) $|y|=f(x)$



ز) $|y| = f(|x|)$



نکته:



الف) برای رسم $y = f(|x|)$ ابتدا نمودار واقع در xهای منفی را پاک می‌کنیم و سپس نمودارهای واقع در قسمت مثبت محور طول‌ها را نسبت به محور yها قرینه می‌کنیم.

ب) برای رسم $|y| = f(x)$ ابتدا نمودارهای واقع در زیر محور طول‌ها را پاک می‌کنیم و سپس نمودارهای واقع در بالای محور طول‌ها را نسبت به محور طول‌ها قرینه می‌کنیم.

-۲۸

پ) $y = f(|x-۱|+۳) \Rightarrow \underbrace{-۳ < |x}_{\text{بدیهی}} -۱|+۳ \le ۶ \Rightarrow |x-۱|+۳ \le ۶ \Rightarrow |x-۱| \le ۳$

$$\Rightarrow -۲ \le x \le ۴ \Rightarrow D_y : [-۲,۴]$$

ت) $y = ۲|f(x-۱)|-۵$

دامنه : $-۳ < x-۱ \le ۶ \Rightarrow -۲ < x \le ۷ \Rightarrow D_y : (-۲,۷]$

برد : $-۱ < f(x-۱) < ۵ \Rightarrow ۰ \le |f(x-۱)| < ۵ \Rightarrow ۰ \le ۲|f(x-۱)| < ۱۰$

$$\Rightarrow -۵ \le ۲|f(x-۱)|-۵ < ۵ \Rightarrow -۵ \le y < ۵$$

-۲۹ $y = ۲f(\frac{x-۱}{۲})-۱ \Rightarrow ۲ < \frac{x-۱}{۲} < ۸ \Rightarrow ۴ < x-۱ < ۱۶ \Rightarrow ۵ < x < ۱۷ \Rightarrow D_f : (۵,۱۷)$

$$\Rightarrow ۳ \le f \le ۴ \Rightarrow ۶ \le ۲f \le ۸ \Rightarrow ۵ \le ۲f-۱ \le ۷ \Rightarrow R_f = [۵,۷]$$

-۳۳ $f(x) = x^۲ \xrightarrow[\text{محور xها}]{\text{قرینه نسبت به}} f(x) = -x^۲ \xrightarrow[\text{yها}]{\text{نصف کردن}} f(x) = \frac{-x^۲}{۲} \xrightarrow[\text{به چپ}]{\text{انتقال دو واحد}} f(x) = -\frac{(x+۲)^۲}{۲}$

$$\xrightarrow[\text{به بالا}]{\text{انتقال یک واحد}} f(x) = \frac{-(x+۲)^۲}{۲}+۱$$

-۳۵

$$h=\frac{g}{۱+f}=\{(-۱,\frac{۴}{۱+۱}),(۰,\frac{۸}{۱+۳}),(۱,\overset{\text{غیرممکن}}{\frac{۳}{۱+(-۱)}})\}=\{(-۱,۲),(۰,۲)\}$$

-۳۷

$$f(x)=\frac{x+۱}{x^۲-۴}\Rightarrow f=\{(۱,-\frac{۲}{۳}),(۰,-\frac{۱}{۴}),(۳,\frac{۴}{۵})\}\qquad x\neq\pm۲$$

$$g=\{(۱,۲),(۰,۴),(۲,۱),(۳,-۱)\}$$

$$f+g=\{(۱,-\frac{۲}{۳}+۲),(۰,-\frac{۱}{۴}+۴),(۳,\frac{۴}{۵}-۱)\}\Rightarrow f+g=\{(۱,\frac{۴}{۳}),(۰,\frac{۱۵}{۴}),(۳,\frac{-۱}{۵})\}$$

-۳۹

$$\left.\begin{matrix} D_f:\mathbb{R} \\ D_g: x-x^۲\geq ۰\Rightarrow x(۱-x)\geq ۰\Rightarrow ۰\leq x\leq ۱\end{matrix}\right\} D_{f/g}=D_f\cap D_g-\{x\mid g(x)=۰\}$$

$$\Rightarrow D_{f/g}=\mathbb{R}\cap\{۰\leq x\leq ۱\}-\{x\mid x-x^۲=۰\}=\{۰\leq x\leq ۱\}-\{۰,۱\}=\{۰<x<۱\}$$

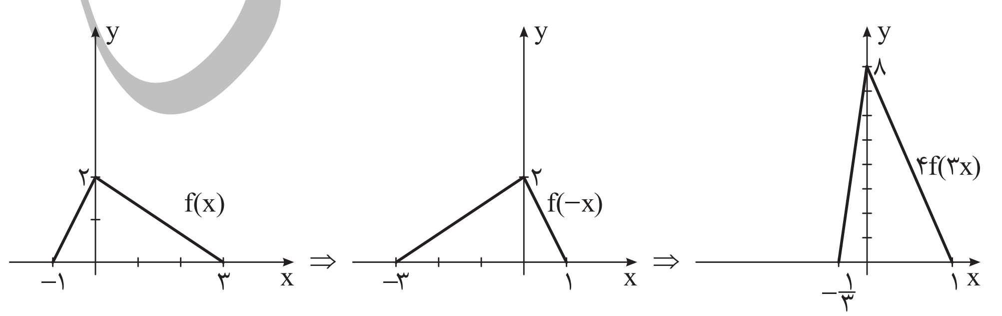
-۴۰ برای این کار ابتدا بین شرط‌ها اشتراک می‌گیریم و ضابطه‌ها را در بازه‌های مشترک با هم جمع می‌کنیم.

$$f(x)=\begin{cases}x+۱ & x>۰\\ x-۱ & x\leq ۰\end{cases}+g(x)=\begin{cases}x & x\geq -۲\\ x-۲ & x<-۲\end{cases}=$$

$$f+g=\begin{cases}(x+۱)+x & x>۰\cap x\geq -۲\\ (x-۱)+x & x\leq ۰\cap x\geq -۲\\ (x+۱)+(x-۲) & x\leq ۰\cap x<-۲\end{cases}\Rightarrow f+g=\begin{cases}۲x+۱ & x>۰\\ ۲x-۱ & -۲\leq x\leq ۰\\ ۲x-۱ & x<-۲\end{cases}$$

$$\Rightarrow f+g=\begin{cases}۲x+۱ & x>۰\\ ۲x-۱ & x\leq ۰\end{cases}$$

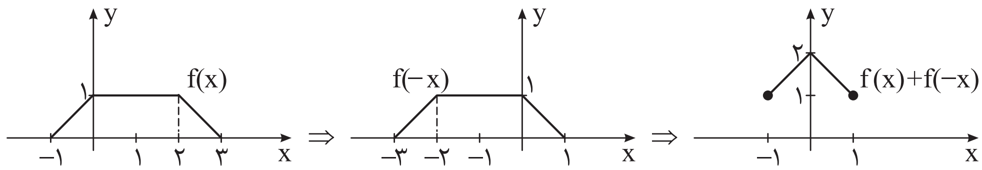
-۴۱



$$\Rightarrow D_y=D_{f(-x)}\cap D_{۴f(۳x)}-\{x\mid ۴f(۳x)=۰\}$$

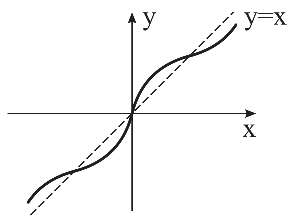
$$\{-۳\leq x\leq ۱\}\cap\{-\frac{۱}{۳}\leq x\leq ۱\}-\{-\frac{۱}{۳},۱\}=\{-\frac{۱}{۳}<x<۱\}$$

-۴۳

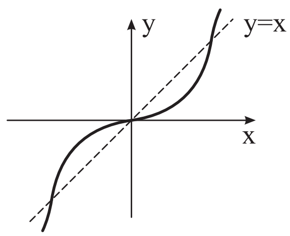


-۴۵

$$y = x + \sin x$$



$$y = x - \sin x$$



-۴۷

$$f(x).f(-\frac{۱}{x}) = \frac{x-۱}{x+۱} \times \frac{-\frac{۱}{x}-۱}{\frac{-۱}{x}+۱} = \frac{x-۱}{x+۱} \times \frac{\frac{-۱-x}{x}}{\frac{-۱+x}{x}} = \frac{x-۱}{x+۱} \times \frac{-(x+۱)}{x-۱} = -۱$$

-۴۸

الف) $gof(۳) = g(f(۳)) = g(-۲) = -۲$

پ) $fog(۳) = f(g(۳)) = f(۲) = -۲$

ث) $gof(-۲) = g(f(-۲)) = g(۲) = ۲$

ج) $fog(-۲) = f(g(-۲)) = f(-۲) = ۲$

-۴۹

$$\begin{cases} f(x) = |x| \\ g(x) = x^۲ + ۲x + ۱ = (x+۱)^۲ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} fog(x) = |(x+۱)^۲| = (x+۱)^۲ \\ gof(x) = (|x|+۱)^۲ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} fog(۱-\sqrt{۲}) = (۱-\sqrt{۲}+۱)^۲ = (۲-\sqrt{۲})^۲ = ۴+۲-۴\sqrt{۲} \\ gof(۱-\sqrt{۲}) = (|۱-\sqrt{۲}|+۱)^۲ = (\sqrt{۲}-۱+۱)^۲ = (\sqrt{۲})^۲ = ۲ \end{cases}$$

$$\Rightarrow fog(۱-\sqrt{۲}) - gof(۱-\sqrt{۲}) = ۴-۴\sqrt{۲}$$

-۵۱ $f=\{(۱,۲),(۲,۳),(۳,۴)\}\Rightarrow fof(۱)=f(f(۱))=f(۲)=۳$

$$fof(۲)=f(f(۲))=f(۳)=۴\Rightarrow fof=\{(۱,۳),(۲,۴)\}$$

$fof(۳)=f(f(۳))=f(۴)=$ وجود ندارد

-۵۲ $$fog(x)=\frac{(x+\sqrt{x^۲+۱})^۲-۱}{x+\sqrt{x^۲+۱}}=\frac{x^۲+x^۲+۱+۲x\sqrt{x^۲+۱}-۱}{x+\sqrt{x^۲+۱}}=\frac{۲x^۲+۲x\sqrt{x^۲+۱}}{x+\sqrt{x^۲+۱}}$$

$$=\frac{۲x(x+\sqrt{x^۲+۱})}{x+\sqrt{x^۲+۱}}=۲x$$

-۵۴ $$x_\circ\xrightarrow{f}f(x_\circ)\xrightarrow{g}۲\xRightarrow{\text{یعنی}}g(f(x_\circ))=۲\xrightarrow{g(x)=x-۱}f(x_\circ)-۱=۲$$

$$\xrightarrow{f(x)=۲x-۲}(۲x_\circ-۲)-۱=۲\Rightarrow x_\circ=\frac{۵}{۲}$$

-۵۵

پ) $f(x)=۲x+۵\Rightarrow fof(x)=۲(۲x+۵)+۵=۴x+۱۵=۲^۲x+(۲^۲-۱)\times ۵$

$$fofof(x)=۲(۴x+۱۵)+۵=۸x+۳۵=۲^۳x+(۲^۳-۱)\times ۵$$

$$fofofof(x)=۲(۸x+۳۵)+۵=۱۶x+۷۵=۲^۴x+(۲^۴-۱)\times ۵$$

بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که در مرتبه‌ی n اُم ترکیب‌های متوالی f داریم: $f_n(x)=۲^nx+(۲^n-۱)\times ۵$

ت) $f(x)=\frac{x+۱}{x-۱}\Rightarrow fof(x)=\frac{\frac{x+۱}{x-۱}+۱}{\frac{x+۱}{x-۱}-۱}=\frac{\frac{۲x}{x-۱}}{\frac{۲}{x-۱}}=x$

$$fofof(x)=\frac{x+۱}{x-۱}$$

بدیهی است که در ترکیب‌های زوج f مقدار تابع برابر x و در ترکیب‌های فرد مقدار تابع، خود تابع یعنی $\frac{x+۱}{x-۱}$ می‌شود.

ج) $f(x)=\frac{x}{\sqrt{۱+x^۲}}\Rightarrow fof(x)=\frac{\frac{x}{\sqrt{۱+x^۲}}}{\sqrt{۱+\frac{x^۲}{۱+x^۲}}}=\frac{\frac{x}{\sqrt{۱+x^۲}}}{\frac{\sqrt{۱+۲x^۲}}{\sqrt{۱+x^۲}}}=\frac{x}{\sqrt{۱+۲x^۲}}$

$$fofof(x)=\frac{\frac{x}{\sqrt{۱+x^۲}}}{\sqrt{۱+۲\frac{x^۲}{۱+x^۲}}}=\frac{\frac{x}{\sqrt{۱+x^۲}}}{\frac{\sqrt{۱+۳x^۲}}{\sqrt{۱+x^۲}}}=\frac{x}{\sqrt{۱+۳x^۲}}$$

پس می‌توان نوشت که ترکیب n اُم از تابع f برابر است با: $f_n(x)=\frac{x}{\sqrt{۱+nx^۲}}$

ح) $f(x)=\sqrt[n]{۱+x^n} \Rightarrow fof(x)=\sqrt[n]{۱+(\sqrt[n]{۱+x^n})^n}=\sqrt[n]{۲+x^n}$

$$fofof(x)=\sqrt[n]{۲+(\sqrt[n]{۱+x^n})^n}=\sqrt[n]{۳+x^n}$$

پس می‌توان نوشت که ترکیب Kاُم عبارت است از: $f_n(x)=\sqrt[n]{k+x^n}$

۵۶- $f(x)=\begin{cases} x^۲+۱ & x\geq ۰ \\ ۱ & x<۰ \end{cases} \Rightarrow -f(x)=\begin{cases} -x^۲-۱ & x\leq ۰ \\ -۱ & x<۰ \end{cases} \Rightarrow f(-f(x))=f(\text{مقدار منفی})=۱$

۵۸- $f(x)=\begin{cases} ۲x & x\leq ۱ \\ ۴ & ۱<x<۲ \\ \sqrt[۳]{x} & x\geq ۲ \end{cases} \Rightarrow f(g(x))=f(x^۳-۱)=\begin{cases} ۲(x^۳-۱) & x^۳-۱\leq ۱ \\ ۴ & ۱<x^۳-۱<۲ \\ \sqrt[۳]{x^۳-۱} & x^۳-۱\geq ۲ \end{cases}$

$$f(x^۳-۱)=\begin{cases} ۲x^۳-۲ & x\leq \sqrt[۳]{۲} \\ ۴ & \sqrt[۳]{۲}<x<\sqrt[۳]{۳} \\ \sqrt[۳]{x^۳-۱} & x\geq \sqrt[۳]{۲} \end{cases}$$

۵۹- از آنجایی‌که $f(f(n))$ به علاوه‌ی $f(n)$ درجه‌ی یک شده است، پس $f(n)$ باید درجه‌ی یک باشد. پس آن‌را $f(n)=an+b$ در نظر می‌گیریم.

$$f(f(n))+f(n)=۲n+۳ \Rightarrow f(an+b)+an+b=a(an+b)+b+an+b$$

$$=(a^۲+a)n+(ab+۲b) \Rightarrow (a^۲+a)n+(ab+۲b)=۲n+۳$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^۲+a=۲ \Rightarrow \begin{cases} a=۱ \\ a=-۲ \end{cases} \\ ab+۲b=۳ \Rightarrow \begin{cases} a=۱ \Rightarrow b=۱ \\ a=-۲ \Rightarrow b \text{ غ. ق. ق.} \end{cases} \end{cases}$$

پس فقط $a=۱$ و $b=۱$ یعنی: $f(n)=n+۱$

۶۲-

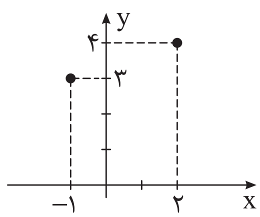
$$\begin{matrix} f(x)=۲x+۱ \\ g(x)=۳x-۲ \end{matrix} \Rightarrow D_{fog}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}=\{۰\leq x\leq ۵ \mid ۱\leq g(x)\leq ۴\}$$

$$=\{۰\leq x\leq ۵ \cap ۱\leq ۳x-۲\leq ۴\}=\{۰\leq x\leq ۵ \cap ۱\leq x\leq ۲\}=\{۱\leq x\leq ۲\}$$

-۶۴

$$\left.\begin{array}{l} f=\{(-۱,۳),(۰,۴),(۲,-۱),(۳,-۱)\} \\ g(x)=\dfrac{-|۲-x|}{۳} \end{array}\right\} \Rightarrow D_{fog}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}$$
$$=\{R\cap g(x)\in\{-۱,۰,۲,۳\}\}$$

$$\Rightarrow D_{fog}=\left\{\begin{array}{ll} \dfrac{-|۲-x|}{۳}=-۱\Rightarrow x=-۱ \\ \dfrac{-|۲-x|}{۳}=۰ \quad \Rightarrow x=۲ \\ \dfrac{-|۲-x|}{۳}=۲ \quad \text{غ. ق. ق} \\ \dfrac{-|۲-x|}{۳}=۳ \quad \text{غ. ق. ق} \end{array}\right\}\Rightarrow\{-۱,۲\}$$



$$fog(x)\xrightarrow{x=-۱}fog(-۱)=f(g(-۱))=f(-۱)=۳$$
$$fog(x)\xrightarrow{x=۲}fog(۲)=f(g(۲))=f(۰)=۴$$

-۶۵

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=\dfrac{۱}{a^۲x^۲+۱}\Rightarrow D_f:\mathbb{R} \\ g(x)=\dfrac{۱}{\sqrt{a-x}}\Rightarrow D_g:x<a \end{array}\right\}\Rightarrow D_{gof}=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_g\}=\{\mathbb{R}\cap\dfrac{۱}{a^۲x^۲+۱}<a\}$$

با توجه به این‌که: $a^۲x^۲+۱>۰\Rightarrow\dfrac{۱}{a^۲x^۲+۱}>۰\Rightarrow a>۰$

$$\Rightarrow\frac{۱}{a^۲x^۲+۱}<a\Rightarrow a^۳x^۲+a>۱\Rightarrow x^۲>\frac{۱-a}{a^۳}$$

$$\xrightarrow[\text{همه‌ی } \mathbb{R} \text{ باشد باید}]{\text{برای این‌که } x \text{ متعلق به}}\frac{۱-a}{a^۳}\le ۰$$

		۰		۱	
$۱-a$	+		+	•	−
$a^۳$	−	•	+		+
	−	ت	+	•	−

$$\Rightarrow\{۱\le a\}\cup\{a<۰\}\xrightarrow{a>۰}a\ge ۱$$

۶۶- خیر. مثلاً دو تابع $f(x)=x^{۲}$ و $g(x)=\sqrt{x}$ را در نظر بگیرید در این صورت $(fog)_{(x)}=x$ می‌باشد که دامنه‌ی آن در این حالت $\mathbb{R}$ است. در حالی‌که اگر طبق فرمول اصلی دامنه به حل بپردازیم:

$$D_{fog}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}=[۰,+\infty]$$

بنابراین بهترین روش برای حل دامنه‌ی fog استفاده از فرمول D_{fog} می‌باشد.

۶۷-
$$\left.\begin{array}{l} D_f:[۰,۵] \\ D_g:[-۵,۰] \end{array}\right\} \Rightarrow D_{fog}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}=\{۵\le x\le ۰\cap g(x)\in[۰,۵]\}$$

همان‌طور که در شکل می‌بینید $۰\le g(x)$ است و از بازه‌ی $[۰,۵]$ فقط مقدار صفر را می‌تواند اختیار کند.

یعنی:
$$D_{fog}=\{-۵\le x\le ۰\cap g(x)=۰\}=\{-۵\le x\le ۰\cap x=-۵\}=\{-۵\}$$

۶۸-
$$f(g(x))=\frac{x+۱}{x-۱}\Rightarrow f(x-۱)=\frac{x+۱}{x-۱}\xrightarrow[x=t+۱]{x-۱=t} f(t)=\frac{(t+۱)+۱}{(t+۱)-۱}\Rightarrow f(t)=\frac{t+۲}{t}$$

$$\Rightarrow f(X)=\frac{X+۲}{X}$$

۷۱-
$$f(x-\frac{۱}{x})=x^{۳}-\frac{۱}{x^{۳}} \qquad (a^{۳}-b^{۳}=(a-b)^{۳}-۳ab(a-b))$$

$$\Rightarrow f(x-\frac{۱}{x})=(x-\frac{۱}{x})^{۳}-۳x\frac{۱}{x}(x-\frac{۱}{x})\Rightarrow f(x-\frac{۱}{x})=(x-\frac{۱}{x})^{۳}-۳(x-\frac{۱}{x})$$

$$\Rightarrow f(X)=X^{۳}-۳X$$

۷۳-
$$f(g(x))=\sqrt{x}+۱\Rightarrow \frac{۱}{\sqrt{g(x)}-۱}=\sqrt{x}+۱\Rightarrow \sqrt{g(x)}-۱=\frac{۱}{\sqrt{x}+۱}$$

$$\Rightarrow \sqrt{g(x)}=\frac{۱}{\sqrt{x}+۱}+۱\Rightarrow g(x)=(\frac{۱}{\sqrt{x}+۱}+۱)^{۲}$$

۷۶-
$$f(x)+f(۵)=۴x+۲\xrightarrow{x=۵} f(۵)+f(۵)=۴(۵)+۲\Rightarrow ۲f(۵)=۲۲\Rightarrow f(۵)=۱۱$$

$$f(x)+۱۱=۴x+۲\Rightarrow f(x)=۴x-۹$$

-۷۷

$$af(x)+bf(-x)=4x+2 \xrightarrow{x\to -x} af(-x)+bf(x)=4(-x)+2$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} a \\ -b \end{matrix}\begin{cases} af(x)+b\cancel{f(-x)}=4x+2 \\ a\cancel{f(-x)}+bf(x)=-4x+2 \end{cases}$$

$$a^2f(x)-b^2f(x)=4ax+2a+4bx-2b$$

$$\Rightarrow f(x)(a^2-b^2)=(4a+4b)x+2a-2b$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{4(a+b)x+2(a-b)}{a^2-b^2}$$

-۷۹

$$f(\sin x)+2f(\cos x)=2\sin^2 x \xrightarrow{x\to \frac{\pi}{2}-x} f(\sin(\frac{\pi}{2}-x))+2f(\cos(\frac{\pi}{2}-x))=2\sin^2(\frac{\pi}{2}-x)$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} \\ -2 \end{matrix}\begin{cases} f(\sin x)+2f(\cos x)=2\sin^2 x \\ f(\cos x)+2f(\sin x)=2\cos^2 x \end{cases}$$

$$f(\sin x)-4f(\sin x)=2\sin^2 x-4\cos^2 x$$

$$\Rightarrow -3f(\sin x)=2\sin^2-4(1-\sin^2 x)$$

$$\Rightarrow -3f(\sin x)=6\sin^2 x-4$$

$$\Rightarrow f(\sin x)=\frac{4}{3}-2\sin^2 x$$

-۸۱

$$f(\frac{x}{x^2+1})=\frac{x^2}{x^4+1}\Rightarrow f(\frac{1}{\frac{x^2+1}{x}})=\frac{1}{\frac{x^4+1}{x^2}}\Rightarrow f(\frac{1}{x+\frac{1}{x}})=\frac{1}{x^2+\frac{1}{x^2}}$$

$$\Rightarrow f(\frac{1}{x+\frac{1}{x}})=\frac{1}{(x+\frac{1}{x})^2-2}\Rightarrow \frac{1}{x+\frac{1}{x}}=t\Rightarrow x+\frac{1}{x}=\frac{1}{t}$$

$$\Rightarrow f(t)=\frac{1}{(\frac{1}{t})^2-2}\Rightarrow f(X)=\frac{1}{\frac{1}{X^2}-2}$$

تابع f فرد است. پس داریم:

$$f=\{(-2,a-1),(2,4),(7,b-3),(-7,1)\}$$

$$f(-2)=-f(2)\Rightarrow a-1=-(4)\Rightarrow a=-3$$

$$f(-7)=-f(7)\Rightarrow 1=-(b-3)\Rightarrow b=2$$

-۸۳

ث) اولاً: $D_f : \mathbb{R}$

ثانیاً: $$f(-x) = \frac{3^{-x}-1}{3^{-x}+1} = \frac{\frac{1}{3^x}-1}{\frac{1}{3^x}+1} = \frac{\frac{1-3^x}{3^x}}{\frac{1+3^x}{3^x}} = \frac{1-3^x}{1+3^x}$$

$$= \frac{-(3^x-1)}{3^x+1} = -f(x)$$

پس تابع فرد است.

ج) اولاً: $\frac{20-x}{20+x} > 0 \Rightarrow -20 < x < 20$ دامنه متقارن است.

ثانیاً: $$f(-x) = \log\frac{20+x}{20-x} = \log\left(\frac{20-x}{20+x}\right)^{-1} = -\log\left(\frac{20-x}{20+x}\right) = -f(x)$$

تابع فرد است.

چ) $$f(x) = \begin{cases} 1 & x \ge 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases} \Rightarrow D_f : \mathbb{R}$$

$$f(-x) = \begin{cases} 1 & -x \ge 0 \\ -1 & -x < 0 \end{cases} \Rightarrow f(-x) = \begin{cases} 1 & x \le 0 \\ -1 & x > 0 \end{cases} \Rightarrow$$ $f(-x)$ نه با $f(x)$ برابر است و نه با قرینه‌ی آن. پس تابع نه زوج است و نه فرد.

خ) $$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x}}{1-x} & x \ge 0 \\ \frac{-\sqrt{-x}}{1+x} & x < 0 \end{cases} \Rightarrow D_f : \mathbb{R}-\{\pm 1\}$$ دامنه متقارن است.

$$f(-x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{-x}}{1+x} & -x \ge 0 \\ \frac{-\sqrt{-(-x)}}{1+(-x)} & -x < 0 \end{cases} \Rightarrow f(-x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{-x}}{1+x} & x \le 0 \\ \frac{-\sqrt{+x}}{1-x} & x > 0 \end{cases}$$

ضابطه‌ها به جز در $x=0$ با هم قرینه‌اند پس اگر ثابت کنیم در $x=0$ نیز این دو قرینه‌اند، تابع فرد می‌گردد.

$f(0) = 0 \Rightarrow f(-(0)) = -f(0) \Rightarrow 0 = 0$ بنابراین تابع فرد است.

ر) $$f(x) = \left[\frac{|x|}{|x|+1}\right] \Rightarrow D_f : \mathbb{R}$$

از آن‌جایی‌که $0 \le \frac{|x|}{|x|+1} < 1$ است. پس $\left[\frac{|x|}{|x|+1}\right] = 0$ لذا $f(x) = 0$ می‌باشد. بنابراین تابع هم زوج و هم فرد است.

ز) $f(x)=\frac{۲}{۱+x}+\frac{۱+x}{۱-x}$ اولاً : $D_f:\mathbb{R}-\{\pm ۱\}$ دامنه متقارن است.

ثانیاً : $f(x)=\frac{۲}{۱+x}+\frac{-(۱-x)+۲}{۱-x}=\frac{۲}{۱+x}+\frac{-(۱-x)}{۱-x}+\frac{۲}{۱-x}$

$$=\frac{۲}{۱+x}+\frac{۲}{۱-x}-۱\Rightarrow f(-x)=\frac{۲}{۱-x}+\frac{۲}{۱+x}-۱$$

$\Rightarrow f(-x)=f(x)$ تابع زوج است.

-۸۴ $f(x)=\log(\sqrt{a^۲x^۲+۱}+۵x)\Rightarrow f(-x)=-f(x)\Rightarrow f(-x)+f(x)=۰$

$$\Rightarrow \log(\sqrt{a^۲x^۲+۱}-۵x)+\log(\sqrt{a^۲x^۲+۱}+۵x)=۰$$

$$\Rightarrow \log(\sqrt{a^۲x^۲+۱})^۲-(۵x)^۲=۰\Rightarrow \log(a^۲x^۲+۱-۲۵x^۲)=۰=\log ۱$$

$$\Rightarrow a^۲x^۲=۲۵x^۲$$

$$\Rightarrow a^۲=۲۵\Rightarrow a=\pm ۵$$

-۸۹
$$f(x)=\begin{cases} x^۲+۲x+۳ & x\ge ۴\\ ۲|x+۳|+a|x+b| & -۴<x<۴\\ cx^۲+dx+e & x\le -۴\end{cases}\Rightarrow f(-x)=\begin{cases} x^۲-۲x+۳ & -x\ge ۴\\ ۲|-x+۳|+a|-x+b| & -۴<-x<۴\\ cx^۲-dx+e & -x\le -۴\end{cases}$$

$$\Rightarrow f(-x)=\begin{cases} x^۲-۲x+۳ & x\le -۴\\ ۲|x+۳|+a|x+b| & -۴<x<۴\\ cx^۲-dx+e & x\ge ۴\end{cases}\Rightarrow f(-x)=f(x)$$

$$\Rightarrow\begin{cases} cx^۲-dx+e=x^۲+۲x+۳\Rightarrow\begin{cases} c=۱\\ -d=۲\Rightarrow d=-۲\\ e=۳\end{cases}\\ ۲|x+۳|+a|x+b|=۲|x-۳|+a|x-b|\Rightarrow\begin{cases} -b=۳\Rightarrow b=-۳\\ a=۲\end{cases}\end{cases}$$

-۹۰ $f(x)=\frac{x+۱}{x^۲-۲}\Rightarrow f(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{۲}+\frac{f(x)-f(-x)}{۲}$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{\frac{x+۱}{x^۲-۲}+\frac{-x+۱}{x^۲-۲}}{۲}+\frac{\frac{x+۱}{x^۲-۲}-\frac{-x+۱}{x^۲-۲}}{۲}$$

۹۱- از آن‌جایی که در تابع فرد، اگر صفر جزو دامنه باشد مقدار تابع نیز در این نقطه برابر صفر می‌گردد. پس:

$$f(۰)=۰ \Rightarrow a-\cos ۰=۰ \Rightarrow a-۱=۰ \Rightarrow a=۱$$

از طرفی داریم:

$$f(-x)=\begin{cases} ۱-\cos(-x) & -x\geq ۰ \\ g(-x) & -x<۰ \end{cases} \Rightarrow f(-x)=\begin{cases} ۱-\cos x & x\leq ۰ \\ g(-x) & x>۰ \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(-x)=-f(x) \Rightarrow g(-x)=-(۱-\cos x)$$

$$\Rightarrow g(-\pi)=-(۱-\cos\pi)=-۲$$

۹۲- $$h(-x)=-h(x) \Rightarrow \frac{g(-x)}{f^{۲}(-x)+۱}=\frac{-g(x)}{f^{۲}(x)+۱} \Rightarrow$$ تابع g فرد باشد و تابع f یا زوج یا فرد باشد.

۹۳-

الف) $h(x)=f(|x|) \Rightarrow h(-x)=f(|x|) \Rightarrow h(-x)=h(x)$

با توجه به قرینه‌بودن دامنه‌ی f دامنه‌ی تابع h نیز متقارن می‌گردد. پس تابع h زوج است.

پ) $h(x)=-f(-x) \Rightarrow h(-x)=-f(-(-x)) \Rightarrow h(-x)=-f(x)$

$$\xrightarrow{f(-x)=-f(x)} h(-x)=f(-x) \Rightarrow h(-x)=-h(x)$$

تابع h با توجه به متقارن بودن دامنه‌ی آن فرد است.

ج) $h(x)=۲f(x-۱) \Rightarrow h(-x)=۲f(-x-۱)$

با توجه به عدم ارتباط $f(-x-۱)$ با $f(x+۱)$ بنابراین تابع نه زوج و نه فرد است.

۹۴-

دامنه gof متقارن است. ج) $D_{gof}=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_g\}$

پس تابع زوج است. $\Rightarrow gof(-x)=g(f(-x))=g(f(x))=gof(x)$

پس تابع زوج است. چ) با توجه به تقارن دامنه $\Rightarrow fof(-x)=f(f(-x))=f(+f(x))$

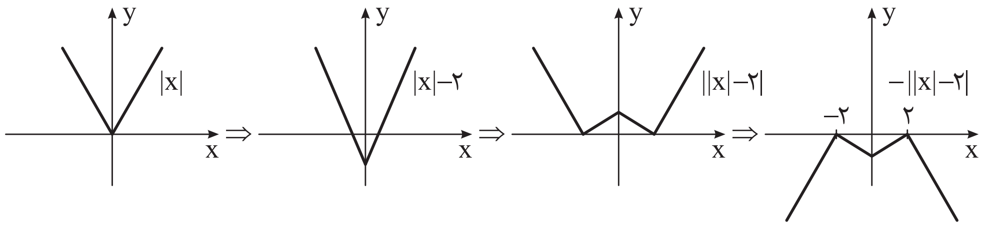
تابع زوج است. خ) $(f+|g|)of=(f+|g|)of(-x)=(f+|g|)of(x)$

۹۵-

ثابت	$[-۲,۰]$:	صعودی	$(-\infty,-۲]$:
نزولی	$[۲,۴]$:	صعودی	$[۰,۲]$:
		صعودی	$[۴,+\infty)$:

-۹۷

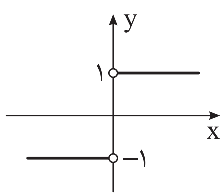
الف) $f(x)=-||x|-2|$



تابع در بازه‌های $(-\infty,-2]\cup[0,2]$ صعودی و در بازه‌های $[-2,0]\cup[2,+\infty)$ نزولی است.

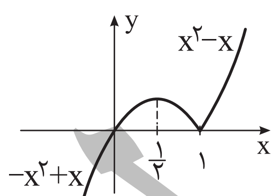
ب) $f(x)=\dfrac{x}{|x|}$

تابع به طور کلی صعودی است؛ ولی در بازه‌های $(-\infty,0)$ و $(0,+\infty)$ ثابت است.



پ) $f(x)=x|x-1|=\begin{cases} x(x-1) & x\ge 1 \\ -x(x-1) & x<1 \end{cases}=\begin{cases} x^2-x & x\ge 1 \\ -x^2+x & x<1 \end{cases}$

تابع در بازه‌های $(-\infty,\frac{1}{2}]\cup[1,+\infty)$ صعودی و در بازه‌ی $[\frac{1}{2},1]$ نزولی است.



-۹۹

الف) $f(x)=(x-2)^2-1 \qquad x\in(-\infty,2]$

$$x_2>x_1 \Rightarrow x_2-2>x_1-2 \xrightarrow{\text{دو طرف منفی‌اند}} (x_2-2)^2<(x_1-2)^2$$

$$\Rightarrow (x_2-2)^2-1<(x_1-2)^2-1 \Rightarrow y_2<y_1 \Rightarrow$$ تابع نزولی است.

پ) $f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}=\dfrac{x+1-2}{x+1}=1-\dfrac{2}{x+1} \qquad x\in(-1,+\infty)$

$$x_2>x_1 \Rightarrow x_2+1>x_1+1 \xrightarrow{\text{طرفین مثبت‌اند}} \frac{1}{x_2+1}<\frac{1}{x_1+1} \Rightarrow -\frac{2}{x_2+1}>\frac{-2}{x_1+1}$$

$$\Rightarrow 1-\frac{2}{x_2+1}>1-\frac{2}{x_1+1} \Rightarrow y_2>y_1$$ تابع صعودی است.

ث) $f(x)=\sin \text{۵}x \qquad x\in(-\frac{\pi}{\text{۱۰}},\frac{\pi}{\text{۱۰}})$

$$-\frac{\pi}{\text{۱۰}}<x<\frac{\pi}{\text{۱۰}}\Rightarrow \frac{-\text{۵}\pi}{\text{۱۰}}<\text{۵}x<\frac{\text{۵}\pi}{\text{۱۰}}\Rightarrow -\frac{\pi}{\text{۲}}<\text{۵}x<\frac{\pi}{\text{۲}}$$

کمان $\text{۵}x$ در ربع‌های اول و چهارم واقع است.

$$x_{\text{۲}}>x_{\text{۱}}\Rightarrow \text{۵}x_{\text{۲}}>\text{۵}x_{\text{۱}}\xrightarrow[\text{در ربع‌های چهارم و اول‌اند}]{\text{با توجه به این‌که کمان‌ها}}\sin(\text{۵}x_{\text{۲}})>\sin(\text{۵}x_{\text{۱}})$$

$\Rightarrow y_{\text{۲}}>y_{\text{۱}}$ تابع صعودی است.

-۱۰۱

پ) $|f(x)|+\text{۱}$

$$x_{\text{۲}}>x_{\text{۱}}\Rightarrow f(x_{\text{۲}})>f(x_{\text{۱}})\Rightarrow |f(x_{\text{۲}})|<|f(x_{\text{۱}})|\Rightarrow |f(x_{\text{۲}})|+\text{۱}<|f(x_{\text{۱}})|+\text{۱}$$

تابع نزولی است.

ث) $\frac{f(x)-\text{۱}}{f(x)-\text{۲}}=\frac{f(x)-\text{۲}+\text{۱}}{f(x)-\text{۲}}=\frac{f(x)-\text{۲}}{f(x)-\text{۲}}+\frac{\text{۱}}{f(x)-\text{۲}}=\text{۱}$

$$x_{\text{۲}}>x_{\text{۱}}\Rightarrow f(x_{\text{۲}})>f(x_{\text{۱}})\Rightarrow f(x_{\text{۲}})-\text{۲}>f(x_{\text{۱}})-\text{۲}\Rightarrow \frac{\text{۱}}{f(x_{\text{۲}})-\text{۲}}<\frac{\text{۱}}{f(x_{\text{۱}})-\text{۲}}$$

$\text{۱}+\frac{\text{۱}}{f(x_{\text{۲}})-\text{۲}}<\text{۱}+\frac{\text{۱}}{f(x_{\text{۱}})-\text{۲}}\Rightarrow$ تابع نزولی است.

ج) $|f(x)-\text{۲}|$

$$x_{\text{۲}}>x_{\text{۱}}\Rightarrow f(x_{\text{۲}})>f(x_{\text{۱}})\Rightarrow f(x_{\text{۲}})-\text{۲}>f(x_{\text{۱}})-\text{۲}\Rightarrow |f(x_{\text{۲}})-\text{۲}|<|f(x_{\text{۱}})-\text{۲}|$$

پس تابع نزولی می‌گردد.

۱۰۲- الف) چون تابع اکیداً نزولی است، با افزایش مقادیر داخلی پرانتز f مقدار آن کاهش می‌یابد و با توجه به این‌که $x^{\text{۲}}+\text{۱}$ از $x^{\text{۲}}-\text{۱}$ بیش‌تر است، پس $f(x^{\text{۲}}+\text{۱})$ از $f(x^{\text{۲}}-\text{۱})$ کوچک‌تر خواهد بود.

-۱۰۳

$$x_{\text{۲}}>x_{\text{۱}}\Rightarrow f(x_{\text{۲}})-\text{۳}x_{\text{۲}}>f(x_{\text{۱}})-\text{۳}x_{\text{۱}}\Rightarrow f(x_{\text{۲}})-f(x_{\text{۱}})>\text{۳}x_{\text{۲}}-\text{۳}x_{\text{۱}} \qquad (\text{۱})$$

$$x_{\text{۲}}>x_{\text{۱}}\Rightarrow f(x_{\text{۲}})-x_{\text{۲}}^{\text{۳}}>f(x_{\text{۱}})-x_{\text{۱}}^{\text{۳}}\Rightarrow f(x_{\text{۲}})-f(x_{\text{۱}})>x_{\text{۲}}^{\text{۳}}-x_{\text{۱}}^{\text{۳}} \qquad (\text{۲})$$

$$x_{\text{۲}}>x_{\text{۱}}\Rightarrow f(x_{\text{۲}})-x_{\text{۲}}^{\text{۲}}-x_{\text{۲}}>f(x_{\text{۱}})-x_{\text{۱}}^{\text{۲}}-x_{\text{۱}}\Rightarrow f(x_{\text{۲}})-f(x_{\text{۱}})>x_{\text{۲}}^{\text{۲}}-x_{\text{۱}}^{\text{۲}}+x_{\text{۲}}-x_{\text{۱}} \qquad (\text{۳})$$

حال کافی است ثابت کنیم $3x_2-3x_1 \ge x_2^2-x_1^2+x_2-x_1$ یا $x_2^3-x_1^3 \ge x_2^2-x_1^2+x_2-x_1$ که به روش برهان خلف متوسل می‌شویم:

فرض خلف: $3x_2-3x_1 < x_2^2-x_1^2+x_2-x_1$ و $x_2^3-x_1^3 < x_2^2-x_1^2+x_2-x_1$

$$\begin{cases} x_2^2-x_1^2+x_2-x_1 > 3x_2-3x_1 \\ x_2^2-x_1^2+x_2-x_1 > x_2^3-x_1^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x_2-x_1)(x_2+x_1+1) > 3(x_2-x_1) \\ (x_2-x_1)(x_2+x_1+1) > (x_2-x_1)(x_2^2+x_1x_2+x_1^2) \end{cases}$$

با فرض $x_1x_2=P$ و $x_2+x_1=S$ و این‌که می‌دانیم: $S^2-2P \ge 2P$ یعنی $S^2 \ge 4P$.

$$\begin{cases} S>2 \\ S+1>S^2-P \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S>2 \\ S+P+1>S^2>4 \Rightarrow S+\frac{S^2}{4}+1>S+P+1>S^2 \end{cases}$$

$\Rightarrow 3S^2-4S-4<0 \xrightarrow{S<2}$ تناقض بنابراین فرض خلاف است.

-۱۰۴

راه حل اول:

برهان خلف: فرض کنید $f(x)$ یکنوای اکید می‌باشد. (مثلاً صعودی اکید باشد. اثبات در حالت نزولی اکید نیز کاملاً مشابه است.) ولی یک‌به‌یک نباشد. چون یک‌به‌یک نیست، پس x_1 و x_2 موجودند که $x_1<x_2$ ولی $f(x_1)=f(x_2)$ است. که این با صعودی اکید بودن f در تناقض است.

راه حل دوم:

چون تابع $f(x)$ صعودی اکید است، پس برای $x_2>x_1$ داریم $f(x_1)<f(x_2)$. یعنی برای هر x_1 و x_2 که $x_1 \ne x_2$ است. هرگز حالتی پیش نمی‌آید که $f(x_1)=f(x_2)$ شود و این، یعنی $f(x)$ یک‌به‌یک است.

-۱۰۵ $a^2-a=2 \Rightarrow a^2-a-2=0 \Rightarrow \left| \begin{array}{l} a=-1 \Rightarrow \text{غ. ق. ق.} \Rightarrow \\ a=2 \end{array} \right.$ چون f تابع نمی‌گردد.

$$a=2 \Rightarrow f=\{(3,2),(2,5),(3,2),(b,2),(-1,4)\} \Rightarrow f^{-1}(a)=f^{-1}(2)=3$$

-۱۰۷

ب) $f(x)=\sqrt[3]{x^3+1}$

$$y_2=y_1 \Rightarrow \sqrt[3]{x_2^3+1}=\sqrt[3]{x_1^3+1} \Rightarrow x_2^3+1=x_1^3+1 \Rightarrow x_2^3=x_1^3 \Rightarrow x_2=x_1$$

ث) $f(x)=x|x| \Rightarrow f(x)=\begin{cases} x^۲ & x\ge ۰ \\ -x^۲ & x<۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_۱=y_۲ \Rightarrow x_۲^۲=x_۱^۲ \xrightarrow{x\ge ۰} x_۲=x_۱ \\ y_۱=y_۲ \Rightarrow -x_۲^۲=-x_۱^۲ \Rightarrow x_۲^۲=x_۱^۲ \end{cases}$

$$\xrightarrow{x<۰} -x_۲=-x_۱ \Rightarrow x_۲=x_۱$$

از طرفی برد $x^۲$ و $-x^۲$ به ترتیب $[۰,+\infty)$ و $(-\infty,۰)$ است که اشتراکی ندارند. پس تابع یک‌به‌یک است.

چ) $y_۲=y_۱ \Rightarrow \dfrac{|x_۱|-۲}{|x_۱|+۱}=\dfrac{|x_۲|-۲}{|x_۲|+۱} \Rightarrow \cancel{|x_۱x_۲|}+|x_۲|-۲|x_۱|\cancel{-۲}=\cancel{|x_۱x_۲|}+|x_۱|-۲|x_۲|\cancel{-۲}$

$$\Rightarrow ۳|x_۲|=۳|x_۱| \Rightarrow |x_۲|=|x_۱| \Rightarrow x_۲=\pm x_۱$$

تابع یک‌به‌یک نیست.

د) $f(x)=x^۳+۳x$

$$y_۲=y_۱ \Rightarrow x_۲^۳+۳x_۲=x_۱^۳+۳x_۱ \Rightarrow x_۲^۳-x_۱^۳+۳(x_۲-x_۱)=۰$$

$$\Rightarrow (x_۲-x_۱)(x_۲^۲+x_۱x_۲+x_۱^۲)+۳(x_۲-x_۱)=۰$$

$$\Rightarrow (x_۲-x_۱)[x_۲^۲+x_۱x_۲+x_۱^۲+۳]=۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_۲-x_۱=۰ \\ x_۲^۲+x_۱x_۲+x_۱^۲+۳=۰ \Rightarrow x_۲^۲+x_۱(x_۲)+(x_۱^۲+۳)=۰ \Rightarrow \end{cases}$$ اگر $x_۲$ متغیر باشد.

$$\Delta=b^۲-۴ac=(x_۱)^۲-۴(۱)(x_۱^۲+۳)=-۳x_۱^۲-۴<۰$$

پس رابطه‌ی دیگری بین $x_۱$ و $x_۲$ موجود نمی‌باشد و فقط $x_۱=x_۲$ و تابع یک‌به‌یک است.

۱۰۹- $f(x)=\begin{cases} ۳x+۱ & x\ge ۰ \\ x^۲-۱ & x<۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_۱=y_۲ \Rightarrow ۳x_۱-۱=۳x_۲-۱ \Rightarrow x_۱=x_۲ \\ y_۱=y_۲ \Rightarrow x_۱^۲=x_۲^۲ \Rightarrow -x_۱=-x_۲ \Rightarrow x_۱=x_۲ \end{cases}$

هم‌چنین باید بردها را نیز بیابیم.

$$\left.\begin{array}{l} x\ge ۰ \Rightarrow ۳x\ge ۰ \Rightarrow ۳x-۱\ge -۱ \Rightarrow y\ge -۱ \\ x<۰ \Rightarrow x^۲>۰ \Rightarrow x^۲-۲>-۲ \Rightarrow y>-۲ \end{array}\right\} \Rightarrow$$

این دو برد با هم اشتراک دارند. پس تابع وارون‌پذیر نیست.

۱۱۰- با توجه به این‌که هر دو ضابطه خود در بازه‌هایشان یک‌به‌یک هستند باید اشتراک بردهایشان هم تهی باشد.

$$\left.\begin{array}{l} x\le ۰ \Rightarrow x^۲\ge ۰ \Rightarrow -x^۲\le ۰ \Rightarrow ۴-x^۲\le ۴ \Rightarrow y\le ۴ \\ x>۰ \Rightarrow ۲x>۰ \Rightarrow ۲x+m>m \Rightarrow y>m \end{array}\right\} \Rightarrow (y\le ۴)\cap(y>m)=\varnothing \Rightarrow m\ge ۴$$

-۱۱۲

پ) $f(x)=\sqrt{1+\sqrt{x}} \Rightarrow y^2=1+\sqrt{x} \Rightarrow \sqrt{x}=y^2-1 \Rightarrow x=(y^2-1)^2 \Rightarrow Y=(X^2-1)^2$

$$\Rightarrow f^{-1}(x)=(x^2-1)^2$$

ث) $f(x)=\dfrac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+3} \Rightarrow 2\sqrt{x}-1=\sqrt{x}y+3y \Rightarrow 2\sqrt{x}-\sqrt{x}y=3y+1 \Rightarrow \sqrt{x}(2-y)=3y+1$

$$\Rightarrow \sqrt{x}=\frac{3y+1}{2-y} \Rightarrow y=(\frac{3x+1}{2-x})^2$$

چ) $y=x^3+3x^2+3x+5 \Rightarrow f(y)=(x^3+3x^2+3x+1)+4 \Rightarrow f(y)=(x+1)^3+4$

$$\Rightarrow x+1=\sqrt[3]{y-4} \Rightarrow x=\sqrt[3]{y-4}-1 \Rightarrow Y=\sqrt[3]{X-4}-1$$

خ) $y=x^4-2x^2+1 \qquad x\in(1,+\infty)$

$$y=x^4-2x^2+1 \Rightarrow y=(x^2-1)^2 \Rightarrow \sqrt{y}=|x^2-1| \xrightarrow{x>1} \sqrt{y}=x^2-1 \Rightarrow x^2=\sqrt{y}+1$$

$$\Rightarrow |x|=\sqrt{\sqrt{y}+1} \xrightarrow{x>1} x=\sqrt{\sqrt{y}+1} \Rightarrow f^{-1}(x)=\sqrt{\sqrt{x}+1}$$

-۱۱۳ $f(x)=-x+\sqrt{-2x} \Rightarrow f^{-1}(4)=? \Rightarrow f(?)=4 \Rightarrow -x+\sqrt{-2x}=4 \Rightarrow \sqrt{-2x}=4+x$

$$\Rightarrow -2x=(4+x)^2 \Rightarrow -2x=16+8x+x^2 \Rightarrow x^2+10x+16=0$$

$$\Rightarrow (x+2)(x+8)=0 \Rightarrow x=-2 \quad \text{و} \quad x=-8$$

با جایگذاری این اعداد در معادله‌ی $-x+\sqrt{-2x}=4$ می‌فهمیم که $x=-8$ جواب اضافه است و تنها جواب قابل قبول $x=-2$ می‌باشد.

-۱۱۵ $f(x)=\sqrt{2-\sqrt{x-2}} \Rightarrow y=\sqrt{2-\sqrt{x-2}}$

$$y_1=y_2 \Rightarrow \sqrt{2-\sqrt{x_1-2}}=\sqrt{2-\sqrt{x_2-2}} \Rightarrow \sqrt{x_1-2}=\sqrt{x_2-2} \Rightarrow x_1=x_2$$

پس تابع یک‌به‌یک است.

$$y=\sqrt{2-\sqrt{2-x}} \xrightarrow{y>0} y^2=2-\sqrt{2-x} \xrightarrow{y^2<2} \sqrt{2-x}=2-y^2 \Rightarrow 2-x=(2-y^2)^2$$

$$\Rightarrow x=2-(2-y^2)^2 \Rightarrow y=2-(2-x^2)^2$$

با توجه به دامنه و برد تابع f که $2\le x\le 6$ و برد آن $0\le y\le\sqrt{2}$ است. بنابراین دامنه و برد تابع f^{-1} عبارت است از: $D_{f^{-1}}:[0,\sqrt{2}]$ و $R_{f^{-1}}:[2,6]$.

۱۱۷- $f=\{(x,\sqrt{x}),x\in A\}\Rightarrow f=\{(۰,۰),(۱,۱),(۴,۲),(۹,۳)\}$

$$\left.\begin{array}{l} f+f=۲f=\{(۰,۰),(۱,۲),(۴,۴),(۹,۶)\} \\ f^{-۱}=\{(۰,۰),(۱,۱),(۲,۴),(۳,۹)\} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} f^{-۱}(۲f(۰))=f^{-۱}(۰)=۰ \\ f^{-۱}(۲f(۱))=f^{-۱}(۲)=۴ \\ f^{-۱}(۲f(۴))=f^{-۱}(۴)=\text{ندارد} \\ f^{-۱}(۲f(۹))=f^{-۱}(۶)=\text{ندارد} \end{cases}$$

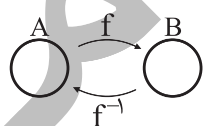
$$\Rightarrow f^{-۱}o(f+f)=\{(۰,۰),(۱,۴)\}$$

۱۱۹- برای یافتن نقطه‌ی تقاطع تابع با تابع وارونش بهتر است تابع را با $y=x$ قطع دهیم:

$$\begin{cases} f(x)=۲x-\frac{۱}{x} \\ y=x \end{cases} \qquad ۲x-\frac{۱}{x}=x\Rightarrow x=\frac{۱}{x}\Rightarrow x=\pm ۱\xrightarrow{x>۰}x=۱\Rightarrow y=۱$$

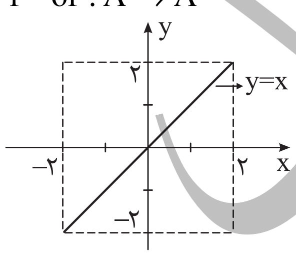
۱۲۱- $y=x^{۳}-۱\Rightarrow x^{۳}=y+۱\Rightarrow x=\sqrt[۳]{y+۱}\Rightarrow y=\sqrt[۳]{x+۱}$

بنابراین، دو تابع معکوس هم هستند. بنابراین نسبت به $y=x$ قرینه‌ی هم هستند.

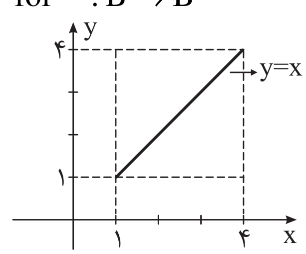
۱۲۲- لزوماً برابر نیستند. زیرا فرض کنید  که $A\neq B$. در این صورت $(fof^{-۱})_{(x)}=x\in B$ و $(f^{-۱}of)_{(x)}=x\in A$ و چون A و B مساوی نیستند، آن‌گاه این دو تابع با هم برابر نیستند.

۱۲۳- طبق آنچه در سوال قبل گفته شد: $A=[-۲,۲]$ و $B=[۱,۴]$ است.

$f^{-۱}of:A\to A$



$fof^{-۱}:B\to B$



۱۲۵- $f(x+T)=f(x) \qquad (۱)$

$$kf(a(x+T')+b)=kf(ax+b)\Rightarrow f(ax+aT'+b)=f(ax+b)$$
$$\Rightarrow f(ax+b+aT')=f(ax+b)$$

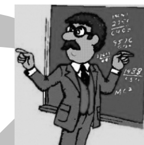
با توجه به رابطه‌ی شماره‌ی (۱) داریم: $aT'=T\Rightarrow T'=\frac{T}{a}$

-۱۲۶

الف) $f(x)=\tan ۳x \Rightarrow T=\frac{۲\pi}{۳}$

ب) $f(x)=۴\cos ۲x+\sin^{۳} ۵x \Rightarrow \begin{cases} T_{۱}=\frac{۲\pi}{۲}=\pi \\ T_{۲}=\frac{۲\pi}{۵} \end{cases} \Rightarrow T_{\text{کل}}=\frac{[\pi,۲\pi]}{(۱,۵)}=\frac{۲\pi}{۱}=۲\pi$

نکته:



برای یافتن دوره‌ی تناوب اصلی بین چند دوره‌ی تناوب می‌توان از فرمول:

$\frac{\text{ک. م. م. صورت‌ها}}{\text{ب. م. م. مخرج‌ها}}$ **استفاده نمود.**

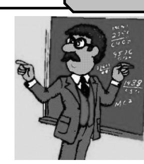
ت) $f(x)=\frac{۲\sin x+\cos x}{\sin x-۳\cos x}$

در نگاه اول دوره‌ی تناوب تابع هم در صورت و هم در مخرج برابر ۲π می‌باشد. ولی اگر صورت و مخرج را به $\cos x$ تقسیم کنیم، داریم:

$$f(x)=\frac{\frac{۲\sin x+\cos x}{\cos x}}{\frac{\sin x-۳\cos x}{\cos x}}=\frac{۲\tan x+۱}{\tan x-۳}$$

حال دوره‌ی تناوب tanها، همگی π هستند. بنابراین $T=\pi$ می‌باشد.

نکته:

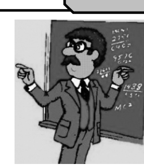


اگر تابعی بعد از ساده‌شدن دوره‌ی تناوب کوچک‌تری پیدا کند، دوره‌ی تناوب کوچک‌تر، دوره‌ی تناوب اصلی می‌باشد.

ث) $f(x)=\cot ۳x-\tan ۳x \Rightarrow f(x)=\frac{\cos ۳x}{\sin ۳x}-\frac{\sin ۳x}{\cos ۳x}=\frac{\cos^{۲} ۳x-\sin^{۲} ۳x}{\sin ۳x.\cos ۳x}=\frac{\cos ۶x}{\frac{۱}{۲}\sin ۶x}$

$$=۲\cot ۶x \Rightarrow T=\frac{\pi}{۶}$$

نکته:



دوره‌ی تناوب $f(x)=\cot mx-\tan mx$ **برابر** $T=\frac{\pi}{|۲m|}$ **می‌باشد.**

ح) $f(x)=(-۱)^{[۲x]}$

با توجه به این‌که دوره‌ی تناوب تابع $f(x)=(-۱)^{[ax]}$ برابر $\frac{۲}{|a|}$ می‌باشد، داریم:

$$f(x)=(-۱)^{[۲x]} \Rightarrow T=\frac{۲}{۲}=۱$$

خ) $f(x)=(-۱)^{[x]}.\cos\pi x$

دوره‌ی تناوب $(-۱)^{[x]}$ برابر ۲ و دوره‌ی تناوب $\cos\pi x$ نیز برابر ۲ می‌باشد. ولی اگر نصف دوره‌ی تناوب، یعنی $T=۱$ را در تابع جایگذاری کنیم، داریم:

$$f(x+T)=f(x+۱)=(-۱)^{[x+۱]}.\cos\pi(x+۱)=(-۱)^{[x]+۱}.\cos(\pi x+\pi)$$

$$=(-۱)^{[x]}.(-۱)^{۱}.-\cos\pi x=(-۱)^{[x]}\cos\pi x=f(x)$$

بنابراین دوره‌ی تناوب برابر $T=۱$ می‌باشد.

۱۲۷- دوره‌ی تناوب $f(x)=[x]+[-x]$ برابر $T=۱$ می‌باشد.

$$h(x)=[mx]+[-mx] \Rightarrow h(x+\frac{۱}{m})=[m(x+\frac{۱}{m})]+[-m(x+\frac{۱}{m})]=[mx+۱]+[-mx-۱]$$

$$=[mx]+[-mx]+۱-۱=[mx]+[-mx]$$

تابع دارای دوره‌ی تناوبی برابر $T=\frac{۱}{m}$ می‌باشد.

۱۲۸- $$f(x+۲)=f(x-۳)\xrightarrow{x\to x-۲}f(x-۲+۲)=f(x-۲-۳)\Rightarrow f(x)=f(x-۵)$$

در نتیجه با توجه به این‌که $f(x\pm T)=f(x)$ داریم $T=۵$.

۱۲۹- الف) چون کمان غیر درجه‌ی یک است، پس تابع غیرمتناوب است.

پ) چون $T_۱=\pi$ و $T_۲=۱$ و یک دوره‌ی تناوب گنگ و یک دوره‌ی تناوب گویاست، نمی‌توان بین آن‌ها ک. م. م. گرفت و تابع دوره‌ی تناوب اصلی ندارد.

ت) تابع متناوب است و دوره‌ی تناوب اصلی آن ۲π است.

چ) چون کمان درجه‌ی یک نیست، پس تابع متناوب نیست.

ح) علی‌رغم این‌که تابع کمانی غیردرجه‌ی یک دارد ولی چون $\pi[x]$ است، متناوب می‌باشد و دوره‌ی تناوب آن $\frac{۲\pi}{\pi}=۲$ می‌باشد.

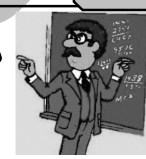
د) $f(x)=\frac{x}{۶}-[\frac{x}{۲}]+[\frac{x}{۳}]=(\frac{x}{۲}-\frac{x}{۳})-[\frac{x}{۲}]+[\frac{x}{۳}]=(\frac{x}{۲}-[\frac{x}{۲}])-(\frac{x}{۳}-[\frac{x}{۳}])$

$$\Rightarrow\begin{cases}T_{۱}=\frac{۱}{|m|}=\frac{۱}{|\frac{۱}{۲}|}=۲\\ T_{۲}=\frac{۱}{|m|}=\frac{۱}{|\frac{۱}{۳}|}=۳\end{cases}$$

بنابراین دوره‌ی تناوب اصلی که ک. م. م. این دو تناوب است، عبارت می‌باشد از: $T_{کل}=۶$

ذ) $f(x)=|\sin ۲x|+|\cos ۲x|$

نکته:



به‌طور کلی دوره‌ی تناوب توابع به شکل:

$f(x)=\sin^{۲k}ax+\cos^{۲k}ax$

$f(x)=|\sin ax|+|\cos ax|$

برابر $\frac{\pi}{|۲a|}$ می‌باشد.

پس دوره‌ی تناوب اصلی تابع قسمت (ذ) عبارت است از $\frac{\pi}{۲(۲)}$ یعنی $\frac{\pi}{۴}$.

ر) توابع مرکب از تابع‌های جبری و مثلثاتی مانند $f(x)=x^{۲}\sin x$ متناوب نمی‌باشند.

۱۳۰- $f(x)=\tan\frac{۳x}{۷}\Rightarrow f(x+T)=f(x)\Rightarrow \tan\frac{۳}{۷}(x+T)=\tan\frac{۳x}{۷}\Rightarrow \tan(\frac{۳x}{۷}+\frac{۳T}{۷})=\tan\frac{۳x}{۷}$

$$\Rightarrow\frac{۳T}{۷}=\pi\Rightarrow T=\frac{۷\pi}{۳}$$

۱۳۳- $f(x)=\tan ax.\cot ax\Rightarrow T=\frac{\pi}{۲|a|}\Rightarrow f(x)=\tan x.\cot x\Rightarrow T=\frac{\pi}{۲}$

در مورد $f(x)=\sin^{۲}x+\cos^{۲}x$ چون $f(x)=۱$ است این تابع ثابت می‌باشد و دارای بی‌نهایت دوره‌ی تناوب است. ولی دوره‌ی تناوب اصلی ندارد. پس به‌طور کلی نامتناوب است.

۱۳۴- $[(\sqrt{۲}+۱)^{۳}]=[(\sqrt{۲})^{۳}+۳(\sqrt{۲})^{۲}+۳(\sqrt{۲})+۱]=[۲\sqrt{۲}+۶+۳\sqrt{۲}+۱]=[۷+۵\sqrt{۲}]$

با توجه به این‌که $\sqrt{۲}$ کمی از $۱/۴$ بیش‌تر است، بنابراین $۵\sqrt{۲}=۷$ پس $[۷+۷]=۱۴$

۱۳۵- $(\sqrt{۲}+۱)^۶+(\sqrt{۲}-۱)^۶=۱۹۸$

با توجه به این‌که $\sqrt{۲}\simeq ۱/۴$ پس $\sqrt{۲}-۱\simeq ۰/۴$. بنابراین: $۰<(\sqrt{۲}-۱)^۶<۱$

پس باید $(\sqrt{۲}+۱)^۶$ کمی بیش‌تر از ۱۹۷باشد تا با اعشار حاصل از $(\sqrt{۲}-۱)^۶$ برابر ۱۹۸گردد.

لذا: $[(\sqrt{۲}+۱)^۶]=۱۹۷$

۱۳۷- $A=x-\frac{۱}{۵}[۵x+۳]=x-\frac{۱}{۵}([۵x]+۳)=x-\frac{۱}{۵}[۵x]-\frac{۳}{۵}\Rightarrow A=\frac{۵x-[۵x]}{۵}-\frac{۳}{۵}$

از طرفی می‌دانیم $۰\le ۵x-[۵x]<۱$ می‌باشد.

پس:

$$۰\le ۵x-[۵x]<۱\Rightarrow ۰\le\frac{۵x-[۵x]}{۵}<\frac{۱}{۵}\Rightarrow -\frac{۳}{۵}\le\frac{۵x-[۵x]}{۵}-\frac{۳}{۵}<\frac{۱}{۵}-\frac{۳}{۵}\Rightarrow -\frac{۳}{۵}\le A<\frac{-۲}{۵}$$

۱۳۸- $f(x)+[f(x)]=۲[x^۲+\frac{۱}{۲}]$

توجه کنید که f حتماً عددی رُند بوده که جمع آن با $[f]$ که عددی رُند است، برابر $۲[x^۲+\frac{۱}{۲}]$ شده که آن نیز عددی رُند است. حال که می‌دانیم f عددی رُند است. پس نیازی به براکت ندارد.

$$f(x)+[f(x)]=۲[x^۲+\frac{۱}{۲}]\Rightarrow f(x)+f(x)=۲[x^۲+\frac{۱}{۲}]\Rightarrow ۲f(x)=۲[x^۲+\frac{۱}{۲}]$$

$$\Rightarrow f(x)=[x^۲+\frac{۱}{۲}]$$

۱۴۰- $[f(x)]^۲=۱\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}[f(x)]=۱\Rightarrow ۱\le f(x)<۲\\ [f(x)]=-۱\Rightarrow -۱<f(x)\le ۰\end{array}\right\}\Rightarrow$ بی‌نهایت تابع داریم که برد آن‌ها اعداد ذکر شده است.

۱۴۱-

الف) $f(x)=\frac{۳x-۵}{x-[x]}\Rightarrow x-[x]\ne ۰\Rightarrow x\ne[x]\Rightarrow x\in\mathbb{R}-\mathbb{Z}$

پ) $f(x)=\frac{\sqrt{x^۲-۹}}{[x]+[-x]}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}x^۲-۹\ge ۰\Rightarrow x^۲\ge ۹\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}x\ge ۳\\ x\le -۳\end{array}\right.\\ [x]+[-x]\ne ۰\Rightarrow x\in\mathbb{R}-\mathbb{Z}\end{array}\right\}\xrightarrow{\cap}D_f:\{x\ge ۳ \text{ یا } x\le -۳\}-\mathbb{Z}$

ث) $f(x)=\sqrt{۴-[x]} \Rightarrow ۴-[x]\geq ۰ \Rightarrow [x]\leq ۴ \Rightarrow x<۵$

ج) $f(x)=\sqrt{[x]^۲-۳[x]+۲} \Rightarrow [x]^۲-۳[x]+۲\geq ۰ \Rightarrow ([x]-۱)([x]-۲)\geq ۰$

$$\Rightarrow ([x]-۱)([x]-۲)=۰ \Rightarrow \begin{cases}[x]=۱\\ [x]=۲\end{cases}$$

[x]		۱		۲	
$[x]^۲-۳[x]+۲$	+	۰	−	۰	+

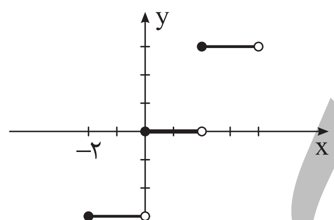
$$\Rightarrow \begin{cases}[x]\leq ۱\\ \text{یا}\\ [x]\geq ۲\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x<۲\\ \text{یا}\\ x\geq ۲\end{cases} \xRightarrow{\cup} D_f:\mathbb{R}$$

ح) $f(x)=\tan\dfrac{\pi[x]}{۲} \Rightarrow \dfrac{\pi[x]}{۲}\neq k\pi+\dfrac{\pi}{۲} \Rightarrow \dfrac{[x]}{۲}\neq k+\dfrac{۱}{۲} \Rightarrow [x]\neq ۲k+۱$

$$\Rightarrow D_f:\mathbb{R}-\{۲k+۱\leq x<۲k+۲\}$$

-۱۴۲

الف) $f(x)=۳[\dfrac{x}{۲}]$ $\qquad [-۲,۴]$



$$-۲\leq x\leq ۴$$

$$\Rightarrow \begin{cases}-۲\leq x<۰ \Rightarrow -۱\leq \dfrac{x}{۲}<۰ \Rightarrow f(x)=۳[\dfrac{x}{۲}]=۳(-۱)=-۳\\ ۰\leq x<۲ \Rightarrow ۰\leq \dfrac{x}{۲}<۱ \Rightarrow f(x)=۳[\dfrac{x}{۲}]=۳(۰)=۰\\ ۲\leq x<۴ \Rightarrow ۱\leq \dfrac{x}{۲}<۲ \Rightarrow f(x)=۳[\dfrac{x}{۲}]=۳(۱)=۳\end{cases}$$

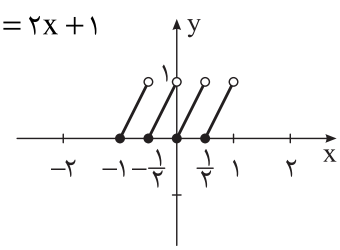
ب) $f(x)=۲x-[۲x]$ $\qquad [-۱,۱]$

$-۱\leq x<-\dfrac{۱}{۲} \Rightarrow -۲\leq ۲x<-۱ \Rightarrow [۲x]=-۲ \Rightarrow f(x)=۲x-(-۲)=۲x+۲$

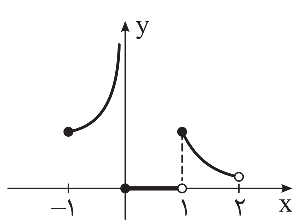
$-\dfrac{۱}{۲}\leq x<۰ \Rightarrow -۱\leq ۲x<۰ \Rightarrow [۲x]=-۱ \Rightarrow f(x)=۲x-(-۱)=۲x+۱$

$۰\leq x<\dfrac{۱}{۲} \Rightarrow ۰\leq ۲x<۱ \Rightarrow [۲x]=۰ \Rightarrow f(x)=۲x-۰=۲x$

$\dfrac{۱}{۲}\leq x<۱ \Rightarrow ۱\leq ۲x<۲ \Rightarrow [۲x]=۱ \Rightarrow f(x)=۲x-۱$



ث) $f(x)=\dfrac{[x]}{x}$ $\qquad [-۱,۲]$

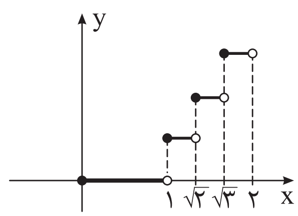


$-۱\leq x<۰ \Rightarrow [x]=-۱ \Rightarrow f(x)=\dfrac{-۱}{x}$

$۰\leq x<۱ \Rightarrow [x]=۰ \Rightarrow f(x)=\dfrac{۰}{x}=۰$

$۱\leq x<۲ \Rightarrow [x]=۱ \Rightarrow f(x)=\dfrac{۱}{x}$

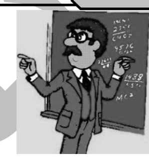
چ) $f(x)=[x^۲]$ $[\circ,۲)$



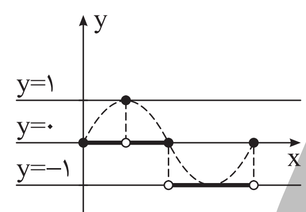
$$\circ\le x^۲<۱\Rightarrow \circ\le x<۱\Rightarrow [x^۲]=\circ$$
$$۱\le x^۲<۲\Rightarrow ۱\le x<\sqrt{۲}\Rightarrow [x^۲]=۱$$
$$۲\le x^۲<۳\Rightarrow \sqrt{۲}\le x<\sqrt{۳}\Rightarrow [x^۲]=۲$$
$$۳\le x^۲<۴\Rightarrow \sqrt{۳}\le x<۲\Rightarrow [x^۲]=۳$$

ح) $f(x)=[\sin x]$ $[\circ,۲\pi]$

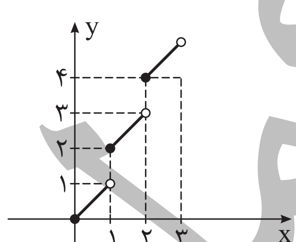
نکته:



برای رسم تابع $[f(x)]$ کافی است ابتدا $f(x)$ را رسم کنیم و سپس خطوط متوالی $y=k$ $(k\in\mathbb{Z})$ را رسم می‌نماییم و هر بخش از منحنی که بین دو خط متوالی واقع شده است را روی خط پائینی تصویر می‌کنیم. اگر نقاط تقاطع را تصویر نکنیم شکل $[f(x)]$ حاصل می‌گردد.



۱۴۳- $f(x)=x+[x]$



$$\circ\le x<۱\Rightarrow f(x)=x$$
$$۱\le x<۲\Rightarrow f(x)=x+۱$$
$$۲\le x<۳\Rightarrow f(x)=x+۲$$

با توجه به شکل، تابع یک‌به‌یک می‌باشد که برای یافتن تابع وارون تابع داریم:

$$y=x+[x]\Rightarrow [y]=[x+[x]]\Rightarrow [y]=[x]+[x]\Rightarrow [y]=۲[x]\Rightarrow [x]=\frac{[y]}{۲}$$

$$y=x+[x]\Rightarrow x=y-[x]\Rightarrow x=y-\frac{[y]}{۲}\Rightarrow Y=X-\frac{[X]}{۲}\Rightarrow f^{-۱}(X)=X-\frac{[X]}{۲}$$

۱۴۷-

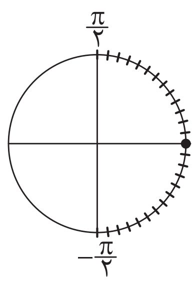
$$x^۲+x<\circ\Rightarrow \begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline & & -۱ & & \circ & \\ \hline & + & | & - & | & + \\ \hline\end{array}\Rightarrow -۱<x<\circ\Rightarrow \begin{cases}[x]=-۱\\ [x^۲]=\circ\\ [x^۳]=-۱\\ [x^۴]=\circ\end{cases}$$

$$\Rightarrow [x]+[x^۲]+[x^۳]+[x^۴]=\circ+(-۱)+\circ+(-۱)=-۲$$

-۱۴۸ $[x^۲+x]=-۱ \Rightarrow -۱ \le x^۲+x<\circ \Rightarrow \begin{cases} x^۲+x<\circ \Rightarrow -۱<x<\circ \\ x^۲+x \ge -۱ \Rightarrow x^۲+x+۱ \ge \circ \Rightarrow \text{همواره برقرار} \end{cases}$

$$-۱<x<\circ \Rightarrow \circ<x^{۲\circ}<۱ \Rightarrow [x^{۲\circ}]=\circ$$

-۱۴۹ $f(x)=\dfrac{۱}{[\cos \pi x]} \Rightarrow [\cos \pi x]=\circ \Rightarrow \circ \le \cos \pi x<۱$



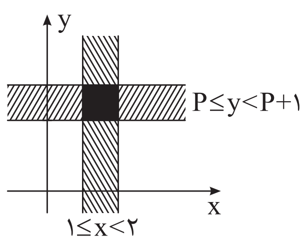
$$\Rightarrow D_f : \mathbb{R}-\{۲k\pi-\frac{\pi}{۲} \le x \le ۲k\pi+\frac{\pi}{۲}\} \cup \{۲k\pi\}$$

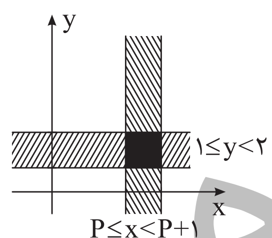
یا

$$\Rightarrow D_f : \{۲k\pi+\frac{\pi}{۲}<x<۲k\pi+\frac{۳\pi}{۲}\} \cup \{۲k\pi\}$$

-۱۵۱ چون P عدد اول است؛ پس $[y]=P$ و $[x]=۱$ یا $[y]=۱$ و $[x]=P$

بنابراین در هر صورت مربعی به ابعاد ۱ جواب معادله می‌گردد.





-۱۵۲ $f(x)=[\frac{-۲x}{n+x}]+[\frac{n+x}{n-x}]=[\frac{-۲x}{n+x}]+[\frac{(n-x)+۲x}{n-x}]=[\frac{-۲x}{n+x}]+[۱+\frac{۲x}{n-x}]$

$$=[\frac{-۲x}{n+x}]+[\frac{۲x}{n-x}]+۱$$

با توجه به متقارن بودن دامنه، تابع زوج است. $f(-x)=[\frac{۲x}{n-x}]+[\frac{-۲x}{n-x}]+۱=f(x)$

پاسخ تست‌های کنکور سراسری ۱۳۹۰

-۱۵۷ $fog=\{(۱,۱),(۳,۷),(a,۲),(b,۷)\} \Rightarrow a=۴$

باید b برابر ۵ باشد تا زوج $(۴,۱)$ ایجاد گردد. $gof=\{(۲,۲),(۴,۱)\}$

بنابراین گزینه‌ی « ۳ » صحیح است.

-۱۵۸ $gof(x)=۲^{-x+[x]} \Rightarrow \circ \le x-[x]<۱ \Rightarrow -۱<-x+[x] \le \circ \Rightarrow ۲^{-۱}<۲^{-x+[x]} \le ۲^{\circ}$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۲}<۲^{-x+[x]} \le ۱$$

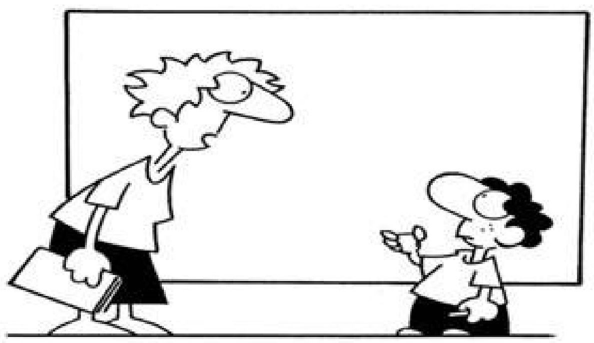
گزینه‌ی « ۱ » صحیح است.

فصل سوم

مثلثات

نویسنگان و ویراستاران:استادان رفیعی و یاوری

اشتباه خنده دار یک دانش آموز در ریاضی



$$\frac{1}{n}\sin x = ?$$

$$\frac{1}{\cancel{n}}\,\mathrm{si}\cancel{n}\,x =$$

$$six = 6$$

۱۳- عبارت زیر را تعیین علامت کنید

$y = x^۲ + ۴x + ۳$

$y = x^۲ + ۴x + ۳$

$y = ۲^۲ + ۴(۲) + ۳$

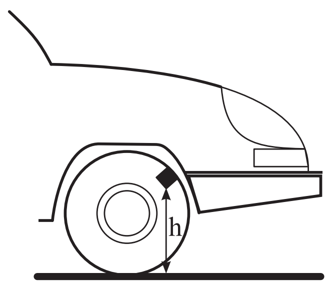
$y = ۴ + ۸ + ۳$

$y = ۱۴$

فصل سوم

مثلثات

یادآوری

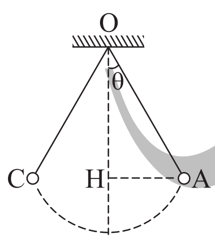


۱- نقطه‌ی A را روی تایر یک ماشین به شعاع ۲۵cm علامت‌گذاری کرده‌ایم. در هنگام حرکت ماشین معادله‌ی فاصله‌ی این نقطه از سطح زمین را به دست آورید.

۲- فرض کنید چرخ‌وفلکی به قطر ۴۰m که مرکز آن از زمین ۲۴m فاصله دارد، وجود داشته باشد. فردی سوار این چرخ‌وفلک می‌شود. پس از طی چه زاویه‌ای فاصله‌ی وی تا زمین برای اولین بار به ۳۴m می‌رسد؟

* ۳- طول عقربه‌ی دقیقه‌شمار یک ساعت دیواری دایره‌ای شکل ۲۵cm و فاصله‌ی مرکز آن تا زمین ۲/۲۵m است. اگر زاویه‌ی پیموده شده‌ی عقربه را نسبت به خط افق θ و فاصله‌ی نوک این عقربه با سطح زمین را y سانتی‌متر فرض کنیم. در این صورت y را بر حسب θ بنویسید.

* ۴- آونگی مطابق شکل مقابل، حول محور قائم نوسان می‌کند. اگر طول آونگ برابر L باشد:



الف) طول OH را برحسب L و نسبت‌های مثلثاتی θ به دست آورید.

ب) نمودار تابع OH را بین زاویه‌ی $-\frac{\pi}{۴}$ و $\frac{\pi}{۴}$ رسم کنید.

پ) بیشینه و کمینه‌ی مقدار OH را اگر زاویه‌ی θ بین $-\frac{\pi}{۴}$ تا $\frac{\pi}{۴}$ تغییر کند، بیابید.

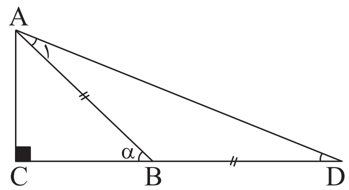
* ۵- نمودار تابع $y = a\sin x + b$ از نقطه‌ی $A(\frac{\pi}{۲},۳)$ گذشته و محور طول‌ها را در نقطه‌ای به طول $\frac{\pi}{۶}$ قطع می‌کند، a و b را بیابید.

۶- اگر $\sin(\frac{\pi\cos x}{۳}) = \alpha$ باشد، حدود تغییرات α را بیابید.

کاربردهای هندسی مثلثات

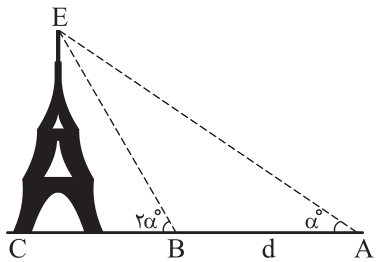
۷- در مثلث قائم‌الزاویه ABC ، $(\hat{C}=۹۰^\circ)$ ضلع BC را تا نقطه‌ی D امتداد می‌دهیم به‌طوری که $AB=BD$ باشد. ثابت کنید.

$$\tan\frac{\alpha}{۲}=\frac{\sin\alpha}{۱+\cos\alpha}$$

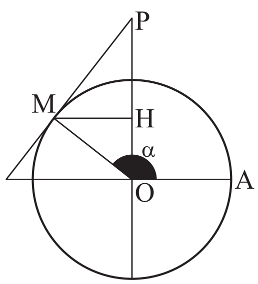


۸- نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌ی ۱۵° را به دست آورید.

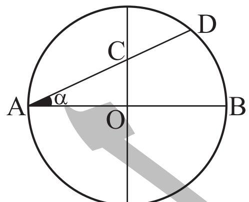
۹- در شکل مقابل زاویه‌ی $A=\alpha^\circ$ و زاویه‌ی $B=۲\alpha^\circ$ و $AB=d$ متر است. ارتفاع برج برحسب α را به دست آورید.



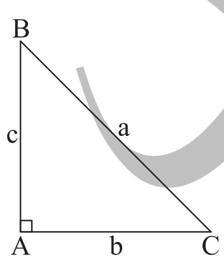
۱۰- در دایره‌ی مثلثاتی مطابق شکل مقابل OA روی محور $\cos$ها و OP روی محـور $\sin$ها قــرار دارد. اگر MH عــمود بر OP و زاویــه‌ی $AOM=\alpha$ فرض شود. HP چقدر است؟



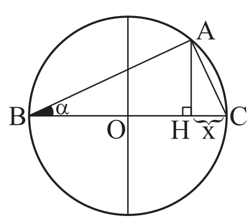
۱۱- در شکل مقابل دو قطر دایره عمود بر هم‌اند. نسبت $\frac{CD}{CA}$ را برحسب α بیابید.



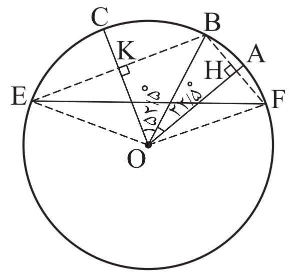
* ۱۲- اگر $A=۹۰^\circ$ و $b=۳c$ باشد، با توجه به شکل مقابل $\tan(B-C)$ را بیابید.



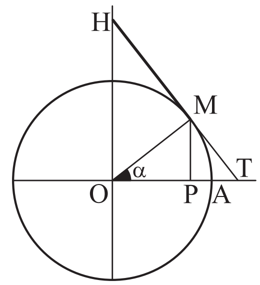
۱۳- با توجه به شکل مقابل مقدار x را بر حسب $\sin\alpha$ به دست آورید.



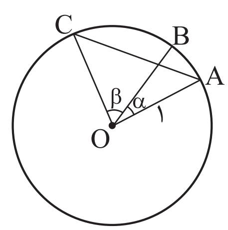
۱۴- با توجه به شکل مقابل از نقطه‌ی B دو خط بر OA و OC عمود می‌کنیم و امتداد می‌دهیم تا دایره را در نقاط F و E قطع کنند. طول EF و AH را بیابید. (شعاع دایره، واحد است.)



۱۵- اندازه‌ی MH را در دایره‌ی مثلثاتی مقابل برحسب α بیابید.



۱۶- در شکل زیر ثابت کنید:



$$AC = ۲\sin\frac{\alpha+\beta}{۲}$$

۱۷- طول اضلاع مثلث قائم‌الزاویه برابر $\sin x$ و $\cos x$ است. ارتفاع مثلث به ازای چه مقدار از x ماکزیمم می‌شود؟ **(تمرین کتاب درسی)**

نسبت‌ها و اتحادهای مثلثاتی

۱۸- اگر $\sin x + \cos x = \sqrt{۲}$ باشد. $\cos ۲x$ را محاسبه کنید.

* ۱۹- از تساوی $\sin ۱۵^\circ \times \cos ۱۵^\circ = \frac{۱}{۴}$ نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌ی ۱۵° را حساب کنید.

$$\begin{cases} \sin ۱۵^\circ \times \cos ۱۵^\circ = \frac{۱}{۴} \\ \cos^۲ ۱۵^\circ + \sin^۲ ۱۵^\circ = ۱ \end{cases}$$ **(راهنمایی)**

* ۲۰- حاصل $\tan ۱۵^\circ + \cot ۱۵^\circ$ را بیابید.

* ۲۱- حاصل $A = \sin(۱۱/۲۵^\circ)\cos(۱۱/۲۵^\circ)\cos(۲۲/۵^\circ)$ را به دست آورید.

۲۲- با کمک فرمول‌های مثلثاتی، عبارت‌های زیر را ثابت کنید.

الف) $\cos ۲\alpha = \cos^۲ \alpha - \sin^۲ \alpha$

* ب) $\cos^۴ x - \sin^۴ x = \cos ۲x$ *

پ) $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha.\cos\alpha$

❊ ت) $\sin 2x = \dfrac{2\tan x}{1+\tan^2 x}$ (تمرین کتاب درسی)

❊ ث) $\cos 2x = \dfrac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$

ج) $\tan(\alpha-\beta) = \dfrac{\tan\alpha - \tan\beta}{1+\tan\alpha.\tan\beta}$

چ) $\tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

ح) $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$ (تمرین کتاب درسی)

❊ خ) $\cos 4x = 8\cos^4 x - 8\cos^3 x + 8$ (تمرین کتاب درسی)

❊ د) $\cos^3\alpha.\sin\alpha - \sin^3\alpha.\cos\alpha = \dfrac{1}{4}\sin 4\alpha$

❊ ذ) $\tan\alpha + \tan\beta = \dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha.\cos\beta}$

ر) $\sin(a+b).\sin(a-b) = \sin^2 a - \sin^2 b$

❊ ز) $\cos(a+b).\cos(a-b) = \cos^2 a - \sin^2 b$

(ر و ز: مزدوج‌های مثلثاتی)

❊ ژ) $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha = 1 - \dfrac{\sin^2 2\alpha}{2}$

س) $\sin^6\alpha + \cos^6\alpha = 1 - \dfrac{3}{4}\sin^2 2\alpha$

❊ ش) $\dfrac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha} \times \dfrac{\cos\alpha}{1+\cos\alpha} = \tan\dfrac{\alpha}{2}$

ص) $\tan 3\alpha = \dfrac{3\tan\alpha - \tan^3\alpha}{1-3\tan^2\alpha}$

❊ ض) $1+\tan\alpha.\tan 2\alpha = \dfrac{1}{\cos 2\alpha}$

ط) $\cot mx - \tan mx = 2\cot 2mx$

ظ) $4\sin x.\sin(60-x).\sin(60+x) = \sin 3x$

❊ ع) $4\cos x\ .\cos(60-x).\cos(60+x) = \cos 3x$

❊ غ) $\tan x\ .\tan(60-x).\tan(60+x) = \tan 3x$

ف) $\cos\dfrac{\pi}{24}.\cos\dfrac{5\pi}{24}.\cos\dfrac{7\pi}{24}.\cos\dfrac{11\pi}{24} = \dfrac{1}{16}$

❊ ق) $\dfrac{2(1+\sin x)}{1+\cos x} = (1+\tan\dfrac{x}{2})^2$

* ۲۳- اگر α و β زاویه‌های منفرجه و کم‌تر از ۲۷۰° باشند؛ به‌طوری که $\sin\alpha = \frac{۳}{۵}$ و $\sin\beta = \frac{۴}{۵}$ مقادیر زیر را بیابید.

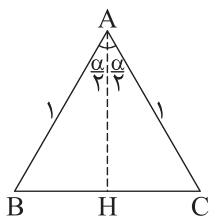
الف) $\sin(\alpha+\beta) =$ ب) $\cos(\alpha-\beta) =$

پ) $\tan(\alpha+۲\beta) =$ ت) $\sin ۲\alpha =$

ث) $\cos ۲\alpha =$ ج) $\sin ۳\alpha =$

چ) $\cos ۳\alpha =$ ح) $\tan ۲\beta =$

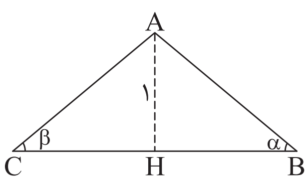
۲۴- با استفاده از مثلث متساوی‌الساقین زیر که طول ساق‌های آن واحد است و زاویه‌ی رأس آن α است با محاسبه‌ی مساحت آن از دو طریق نتیجه بگیرید: $\sin\alpha = ۲\sin\frac{\alpha}{۲}.\cos\frac{\alpha}{۲}$



(تمرین کتاب درسی)

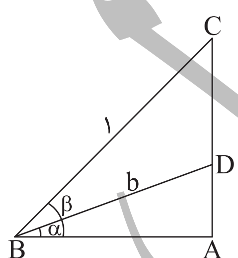
۲۵- با استفاده از رابطه‌ی cosها در سوال فوق ثابت کنید: $۱-\cos\alpha = ۲\sin^۲\frac{\alpha}{۲}$

۲۶- مثلث ABC را به گونه‌ای می‌سازیم که زاویه‌ی رأس B برابر α و زاویه‌ی رأس C برابر β باشد و ارتفاع وارد بر ضلع BC واحد باشد. چگونگی ساختن این مثلث را توضیح دهید.



با محاسبه‌ی طول پاره‌خط‌های AB ، AC ، CH و BH برحسب نسبت‌های مثلثاتی α و β و محاسبه‌ی مساحت مثلث ABC از دو طریق، یا با استفاده از رابطه‌ی sinها در مثلث ABC ، فرمول محاسبه‌ی $\sin(\alpha+\beta)$ را به دست آورید. (تمرین کتاب درسی)

۲۷- در مثال زیر زاویه‌ی A قائمه است و طول ضلع BC واحد است. طول پاره‌خط BD را عددی مانند b فرض کنید. با محاسبه‌ی طول پاره‌خط‌های دیگری که در شکل دیده می‌شود و محاسبه‌ی مساحت مثلث‌هایی که در شکل دیده می‌شوند، با استفاده از تساوی:



(مساحت ADB) − (مساحت ABC) = (مساحت BDC)

ثابت کنید: $\sin(\beta-\alpha) = \sin\beta.\cos\alpha - \cos\beta.\cos\alpha$ (تمرین کتاب درسی)

* ۲۸- ثابت کنید اگر داشته باشیم $a+b+c = K\pi$ آن‌گاه $\tan a + \tan b + \tan c = \tan a.\tan b.\tan c$.

* ۲۹- اگر $-\frac{\pi}{۴} < x < \frac{\pi}{۴}$ و $\frac{۱-\tan x}{۱+\tan x} = \frac{۱-m}{۲+m}$ باشد، حدود تغییرات m را بیابید.

* ۳۰- حاصل $\frac{\sin ۵۳ + \cos ۵۳}{\sin ۵۳ - \cos ۵۳}$ را برحسب تانژانت یک زاویه بیابید.

۳۱- ثابت کنید: $\sin ۱۸^\circ.\cos ۳۶^\circ = \frac{۱}{۴}$ می‌باشد.

۳۲- دوره‌ی تناوب $\frac{\tan ax}{1-\tan^2 ax}$ را بیابید.

۳۳- اگر $\sin 2x = \frac{4}{5}$ باشد، حاصل کسر $\frac{\tan^2 x+\cot^2 x}{\tan^3 x+\cot^3 x}$ را به دست آورید.

* ۳۴- اگر $\sin x+\cos x=\frac{5}{4}$ باشد، $\tan x+\cot x$ چقدر است؟

۳۵- اگر $\sin^4 x+\cos^4 x+\sin^6 x+\cos^6 x=\frac{6}{5}$ باشد، حاصل $\sin^2 2x$ را به دست آورید.

۳۶- اگر $\tan\frac{x}{3}=\frac{1}{3}$ و $\tan(y-\frac{x}{3})=\frac{1}{4}$ باشند، آن‌گاه $\tan(y+\frac{x}{3})$ چقدر است؟

۳۷- اگر $\alpha+\beta=\frac{5\pi}{4}$ ، آن‌گاه حاصل عبارت $(1+\tan\alpha)(1+\tan\beta)$ را بیابید.

* ۳۸- حاصل عبارت $\frac{1+\tan 15^\circ}{1-\tan 15^\circ}$ را به دست آورید.

۳۹- اگر $x=\frac{\pi}{12}$ باشد، حاصل عبارت $\frac{(\sin x+\cos x)^2}{(\sin x-\cos x)^2}$ را بیابید.

* ۴۰- اگر $\sin x\cos x=\frac{-1}{4}$ باشد، حاصل $\sin(x+\frac{\pi}{4})$ را بیابید.

۴۱- اگر $\sin x+\cos x=\frac{1}{3}$ باشد، حاصل $(\cos^4 x-\sin^4 x)^2$ چقدر است؟

معادلات مثلثاتی

۴۲- کلیه‌ی جواب‌های معادله $\frac{1}{\cos x}+\frac{\sqrt{3}}{\sin x}=4$ را تعیین کنید. **(تمرین کتاب درسی)**

۴۳- معادلات زیر را حل کنید.

* الف) $\sin x-\sin 3x=0$

ب) $\sin x+\sin 3x=0$

* پ) $\cos x-\cos 3x=0$

ت) $\cos x+\cos 3x=0$

* ث) $\tan 3x=\tan 2x$

ج) $\tan 4x=\cot x$

* چ) $\tan 4x=\cot(\frac{\pi}{3}+4x)$

* ح) $\tan 7x.\tan 5x=1$

خ) $\sin^3 \pi x + \cos^3 \pi x = 0$

د) $2\sin x - \tan x = 0$

ذ) $\sin 2x + \sqrt{3} - 2\cos x - \sqrt{3}\sin x = 0$

❈ ر) $\cos 2x - 5\cos x + 3 = 0$

❈ ز) $2\sqrt{2}\sin(x + \frac{\pi}{4}) = \cos 2x$

ژ) $2\cos x(\sin x + \cos x) = 1$

س) $\cos 4x.\cos x + \sin 4x.\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

❈ ش) $-\sin x + \sqrt{3}\cos x = 1$

ص) $\sin 2x = 2\cos x$

ض) $3\sin^2 \frac{x}{2} + \cos x = 2$

❈ ط) $\sin 3x.\sin x = \frac{1}{2}\cos 2x$

ظ) $\frac{\sin 7x - \sin x}{\sin 3x} = 2$

❈ ع) $\sin 3x + \sin x = 4\sin x \cos x$

غ) $2\sin(x - \frac{\pi}{8}) + 3\cos(x - \frac{5\pi}{8}) = 5$

ف) $\frac{\tan x(1 - \tan^2 x)}{(1 + \tan^2 x)^2} = \frac{1}{8}$

❈ ق) $\cot\frac{x}{2} - \tan\frac{x}{2} = 2\sqrt{3}$

ک) $3\cos^2 x - \sqrt{3}\sin x \cos x = 3$

❈ گ) $2\cos^2 x + 3\sin 2x - 8\sin^2 x = 0$

ل) $\sqrt{2}(\sin x + \cos x) - \sin 2x = 1$

❈ م) $3\sqrt{2}(\sin x + \cos x) + \sin 2x + 5 = 0$

❈ ن) $\sin^2(x + \frac{\pi}{12}) - \sin^2(x - \frac{\pi}{12}) = 1$

و) $\sin^2 x + \sin^2 2x = \sin^2 3x$

❈ هـ) $(\sqrt{\sqrt{2}+1})^{\sin x} + (\sqrt{\sqrt{2}-1})^{\sin x} = 2$ (راهنمایی: $(\sqrt{\sqrt{2}+1})^{\sin x} = \frac{1}{(\sqrt{\sqrt{2}-1})^{\sin x}}$)

ی) $\sqrt[3]{\sin^2 x} - \sqrt[3]{\cos^2 x} = \sqrt[3]{2\cos 2x}$

۴۴- معادلات زیر را حل کنید.

الف) $۳(\cos x - \sin x) = ۱ + \cos ۲x - \sin ۲x$

❋ ب) $\frac{۱}{\cos x} = ۴\sin x + ۶\cos x$

پ) $\tan ۵x + ۲\sin ۱۰x = ۵\sin ۵x$

❋ ت) $۱ + \cos x + \tan\frac{x}{۲} = ۰$

ث) $\tan x + \tan(x + \frac{\pi}{۴}) = -۲$

ج) $\sin x + \sin ۲x + \sin ۳x = ۰$

❋ چ) $\sin(x + ۲) = \sin x - \sin ۲$

ح) $\cos ۹x - \cos ۷x + \cos ۳x - \cos x = ۰$

خ) $\sin x + \sin ۲x + \sin ۳x = \frac{۱}{۲}\cot\frac{x}{۲}$

❋ د) $\tan x + \tan ۲x - \tan ۳x = ۰$

ذ) $\tan x . \tan ۲x = \tan x + \tan ۲x$

ر) $\sin ۷x + \cos^۲ ۲x = \sin^۲ ۲x + \sin x$

۴۵- عبارت‌های زیر را با کمک اتحادهای مثلثاتی تبدیل به ضرب یا تبدیل به جمع، ساده نمایید.

❋ الف) $\sin ۴۰ + \cos ۷۰ =$ ❋

❋ ب) $\sin\frac{\pi}{۱۲} + \sin\frac{۷\pi}{۱۲} =$

پ) $\frac{\sin x + \sin ۳x - \cos x}{\cos x - \cos ۳x - \sin x} =$

ت) $\frac{\sin a + \sin ۳a + ۲\cos a}{(\sin a + \cos a)^۲} =$

❋ ث) $۱ + \cos ۲x + \cos ۴x =$

ج) $\frac{\sin\alpha - \sin ۷\alpha}{\sin(\frac{\pi}{۴} + ۲\alpha).\sin(۲\alpha - \frac{\pi}{۴})} =$

❋ چ) $\frac{\cos x + \cos ۲x + \cos ۳x}{\cos ۲x}$

ح) $\cos ۵۰^\circ(\tan ۷۰^\circ + \tan ۱۰^\circ) =$ (سراسری – ۸۵)

❋ خ) $\cos ۲۰^\circ \cos ۴۰^\circ + \cos^۲ ۸۰^\circ =$ (سراسری – ۸۶)

د) $\frac{۱}{\cos ۲۰^\circ} + ۲ =$ (سراسری – ۸۷)

ذ) $(\cos ۱۰^\circ - \cos ۷۰^\circ)(\tan ۷۰^\circ - \cot ۱۰۰^\circ) =$ (سراسری – ۸۹)

❋ ر) $\sin^۲ ۳x - \sin^۲ ۵x =$

۴۶- حاصل عبارت $(\tan ۳۵^\circ + \tan ۲۰^\circ)\sin ۲۰^\circ$ را بیابید.

۴۷- ثابت کنید: $\sin ۴۷^\circ + \sin ۶۱^\circ - \sin ۱۱^\circ - \sin ۲۵^\circ = \cos ۷^\circ$

* ۴۸- حاصل کسر $\dfrac{\sin^۲ x + \sin x \sin ۳x + \sin x \sin ۵x}{\cos^۲ x + \cos x \cos ۳x + \cos x \cos ۵x}$ را بیابید.

۴۹- حاصل عبارت $\dfrac{\sin x + \sin ۵x}{\cos x + \cos ۵x} + \dfrac{\cos x + \cos ۵x}{\sin x + \sin ۵x}$ را به ازای $x = \dfrac{\pi}{۳۶}$ به دست آورید.

۵۰- درستی رابطه‌ی مقابل را بررسی کنید. $\sin\dfrac{\pi}{۷} + \sin\dfrac{۲\pi}{۷} + \sin\dfrac{۳\pi}{۷} = \dfrac{۱}{۲}\cot\dfrac{\pi}{۱۴}$

* ۵۱- عبارت $A = \cos^۲ ۵x - \cos^۲ x$ را به ضرب تبدیل کنید.

* ۵۲- ثابت کنید: $\cos\dfrac{\pi}{۵} + \cos\dfrac{۳\pi}{۵} = \dfrac{۱}{۲}$

* ۵۳- اگر $\dfrac{\pi}{۱۲}$ یکی از جواب‌های معادله‌ی $\cos x + \sqrt{۳}\sin x = m$ باشد، m را بیابید.

* ۵۴- جواب‌های معادله‌ی $\sin(\pi \cos x) = -۱$ را در بازه‌ی $[۰, ۲\pi]$ بیابید.

۵۵- ثابت کنید معادله‌ی $a\sin x + b\cos x = c$ در بازه‌ی $[۰, ۲\pi]$ یک ریشه دارد اگر $a^۲ + b^۲ = c^۲$ باشد.

* ۵۶- ثابت کنید معادله‌ی $a\tan x + b\cot x = c$ زمانی ریشه دارد که $|c| \geq ۲\sqrt{ab}$ باشد.

۵۷- دوره‌ی تناوب $y = \sin x \sin ۳x + ۲$ را بیابید.

* ۵۸- اگر $\tan a$ و $\tan b$ ریشه‌های معادله‌ی $x^۲ - ۲x - ۲ = ۰$ باشند، حاصل $\tan(a+b)$ را بیابید.

۵۹- اگر $\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{۱}{۲}$ و $\tan(\alpha-\beta) = \dfrac{۱}{۳}$ باشند، $\tan ۲\alpha$ را بیابید.

۶۰- هرگاه $\alpha - \beta = \dfrac{\pi}{۶}$ باشد، حاصل $\dfrac{۲\sin(\alpha+\beta) - ۱}{\cos\alpha \cos\beta}$ را به دست آورید.

* ۶۱- اگر $\sin x = \dfrac{۱}{۳}$ باشد، حاصل $\dfrac{\sin ۳x + \sin ۴x + \sin ۵x}{\sin x + \sin ۲x + \sin ۳x}$ را بیابید. **(آزاد – ۸۸)**

* ۶۲- عبارت $S = ۱ + \cos x + \cos y + \cos(x+y)$ را تبدیل به ضرب نمایید.

* ۶۳- عبارت $\cos^۲ a + \cos^۲ ۲a + \cos^۲ ۳a - \dfrac{۳}{۲}$ را تبدیل به ضرب نمایید.

۶۴- اگر a، b، c و d جمله‌های متوالی یک دنباله‌ی عددی باشند، معادله‌ی $\sin ax . \cos bx = \sin cx . \cos dx$ را حل کنید.

* ۶۵- معادله $\dfrac{x}{۳} + [\dfrac{x}{۳}] = \sin x + [\sin x]$ چند جواب حقیقی دارد؟ **(المپیاد ایران – ۸۳)**

۱) جواب ندارد. ۲) یکی ۳) دو تا ۴) سه تا ۵) پنج تا

حل معادله به روش هندسی

※ ۶۶- معادله‌ی $x = \sqrt{2}\sin x$ چند ریشه دارد؟

۶۷- معادله‌ی $x\sin x + \cos x = 0$ چند ریشه دارد؟

※ ۶۸- معادله‌ی $x\cos x = 1$ چند ریشه دارد؟

۶۹- معادله‌ی $|x|\sin 2x = 1$ چند ریشه دارد؟

۷۰- خط $y = 2$ با منحنی $y = \sqrt{3}\sin x - \cos x$ در بازه‌ی $[0, 2\pi]$ چه وضعیتی دارد؟

وارون توابع مثلثاتی

۷۱- بر روی دایره‌ی مثلثاتی در بازه‌ی $(0, \frac{\pi}{2})$ نشان دهید که $\sin x < \sin^{-1}(x) < \tan x$

۷۲- وارون توابع زیر را در بازه‌ی خواسته‌شده بیابید.

الف) $f(x) = 2\sin x + 1 \qquad [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

ب) $f(x) = \frac{\sin x}{2\sin x - 1} \qquad [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

※ پ) $f(x) = -2\tan 3x + 7 \qquad (-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6})$

※ ت) $f(x) = \sqrt{\cos 5x} \qquad (0, \frac{\pi}{2})$

※ ث) $f(x) = \frac{2 - \tan 4x}{2 + \tan 4x} \qquad (-\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{8})$

۷۳- بر روی دایره‌ی مثلثاتی تساوی‌های زیر را ثابت کنید. (تمرین کتاب درسی)

الف) $\sin^{-1}(a) + \cos^{-1}(a) = \frac{\pi}{2} \qquad (0 < a < 1)$

※ ب) $\sin^{-1}(-x) = -\sin^{-1}(x) \qquad (-1 \le x \le 1)$

پ) $\cos^{-1}(-x) = \pi - \cos^{-1}(x) \qquad (-1 \le x \le 1)$

※ ت) $\tan^{-1}(-x) = -\tan^{-1}(x)$

ث) $\sin(\cos^{-1}(x)) = \cos(\sin^{-1}(x)) = \sqrt{1 - x^2} \qquad (-1 \le x \le 1)$

۷۴- ثابت کنید $\sin^{-1}(\cos x) = \frac{\pi}{2} - x$ و $\cos^{-1}(\sin x) = \frac{\pi}{2} - x$ می‌باشد.

※ ۷۵- ثابت کنید $\tan^{-1}(\cot x) = \frac{\pi}{2} - x$ و $\cot^{-1}(\tan x) = \frac{\pi}{2} - x$ می‌باشد.

۷۶- ثابت کنید $\tan^{-1}(x) - \tan^{-1}(y) = \tan^{-1}(\frac{x - y}{1 + xy})$.

۷۷- ثابت کنید $\cos^{-1}(1-2t^2)=2\sin^{-1}(t)$.

* ۷۸- ثابت کنید $2\tan^{-1}(x)=\cot^{-1}(\frac{1-x^2}{2x})$.

۷۹- ساده‌شده‌ی عبارت‌های زیر را بیابید.

الف) $\tan(\frac{3\pi}{4}-\tan^{-1}(\frac{3}{2}))=$

ب) $\tan^{-1}(\frac{1}{2})+\tan^{-1}(\frac{1}{3})=$

* پ) $\cos(\sin^{-1}(\frac{5}{7}))=$

ت) $\sin(\cos^{-1}(\frac{-3}{5}))=$

* ث) $\tan(\tan^{-1}(2)+\tan^{-1}(3))=$

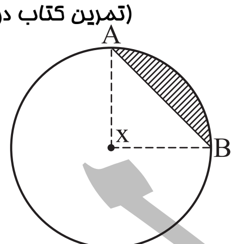
* ج) $\sin(2\cos^{-1}(\frac{3}{5}))=$

* چ) $2\tan^{-1}(\frac{1}{3})+\tan^{-1}(\frac{1}{7})=$

ح) $\cos(\frac{1}{2}\cos^{-1}(\frac{1}{10}))=$

* ۸۰- اگر $a=2\tan^{-1}(t)$ باشد، آن‌گاه $\sin a$ را بیابید.

۸۱- وتر AB مطابق شکل مقابل به سمت مرکز دایره در حال حرکت است. (تمرین کتاب درسی)

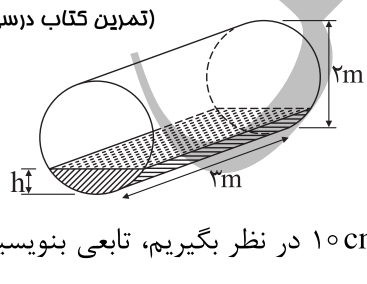


الف) تابعی بسازید که مساحت قطاع دایره را برحسب زاویه‌ی x نمایش دهد.

ب) تابع تغییرات وتر برحسب x را بسازید.

پ) تابع تغییر x برحسب وتر را بیابید.

* ۸۲- مطابق شکل یک منبع گازوئیل استوانه‌ای شکل روی زمین قراردارد. قطر دایره‌ی قاعده‌ی آن ۲m و ارتفاع آن ۳m است. (تمرین کتاب درسی)



الف) تابعی از حجم مخزن برحسب زاویه و h (ارتفاع گازوئیل) بیابید.

ب) تابعی از سطح گازوئیل موجود در مخزن برحسب x و h بیابید.

* ۸۳- در یک کاسه (به شکل نیم‌کره) آب می‌ریزیم. اگر شعاع نیم‌کره را ۱۰cm در نظر بگیریم، تابعی بنویسید که حجم آب داخل کاسه را برحسب ارتفاع آن تعیین کند.

* ۸۴- جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $\frac{\cos 5x\cos 3x-\sin 3x\sin x}{\cos 2x}=1$ به کدام صورت است؟ (سراسری - ۹۰)

۱) $\frac{k\pi}{3}$ ۲) $\frac{k\pi}{2}$ ۳) $\frac{2k\pi}{5}$ ۴) $\frac{2k\pi}{3}$

تمام سوالات امتحان نهایی حسابان (مورخ ۰۸/ خرداد ماه/ ۱۳۹۰)

در کتاب های "مکمل حسابان" و "مکمل سوالات امتحان نهایی حسابان"

شماره سوال امتحان حسابان ۱۳۹۰/۰۳/۰۸	شماره سوال در کتاب‌های "مکمل حسابان" و "مکمل سوالات امتحان نهایی حسابان"
۱	صفحه‌ی ۱۱ سوال ۶۸ مکمل حسابان و صفحه‌ی ۲۲ سوال ۲ مکمل سوالات امتحانی حسابان
۲	صفحه‌ی ۹ سوال ۴۲ مکمل حسابان
۳	صفحه‌ی ۲۱ سوال ۱۶۷ قسمت الف مکمل حسابان
۴	صفحه‌ی ۲۴ سوال ۱۸۵ مکمل حسابان
۶	صفحه ی ۶۹ سوال ۶۳ مکمل حسابان و صفحه‌ی ۳۰ سوال ۶ مکمل سوالات امتحانی حسابان
۷	صفحه‌ی ۷۳ سوال ۹۶ مکمل حسابان
۸	صفحه‌ی ۱۰ سوال ۱۰ مکمل سوالات امتحانی حسابان
۱۰	صفحه‌ی ۱۵ سوال ۹ مکمل سوالات امتحانی حسابان
۱۱	صفحه‌ی ۱۶ سوال ۱۱ مکمل سوالات امتحانی حسابان
۱۲ قسمت الف	صفحه‌ی ۲۱ سوال ۱۷ قسمت « ب » مکمل سوالات امتحانی حسابان
۱۲ قسمت ب	صفحه‌ی ۱۵۷ سوال ۵۰ قسمت « ذ » مکمل حسابان
۱۳	صفحه‌ی ۱۰ سوال ۱۳ مکمل سوالات امتحانی حسابان
۱۵ قسمت ج	صفحه‌ی ۱۹۷ سوال ۷۵ قسمت « خ » مکمل حسابان
۱۶	صفحه‌ی ۱۹۴ سوال ۵۰ مکمل حسابان

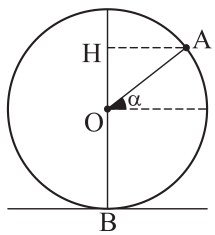
توجه : شماره صفحات بر اساس شماره صفحات چاپ اول کتاب ((مکمل حسابان)) می باشد.

پاسخ فصل سوم

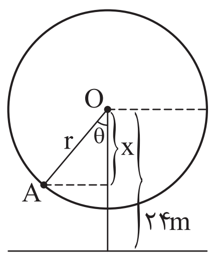
مثلثات

۱- $OH = R.\sin\alpha$

$$BH = OB + OH = R + R\sin\alpha = R(۱+\sin\alpha)$$



۲- $y = ۲۴ - x \xrightarrow[r=۲۰]{x=r\cos\theta} y = ۲۴ - ۲۰\cos\theta$



چون ارتفاع ۳۴ متری مورد نظر است. بنابراین:

$$۳۴ = ۲۴ - ۲۰\cos\theta \Rightarrow \cos\theta = -\frac{۱}{۲} \Rightarrow \theta = ۱۲۰^\circ$$

۶- $$-۱ \le \cos x \le ۱ \Rightarrow -\frac{\pi}{۳} \le \frac{\pi\cos x}{۳} \le \frac{\pi}{۳} \Rightarrow \sin(-\frac{\pi}{۳}) \le \sin(\frac{\pi\cos x}{۳}) \le \sin(\frac{\pi}{۳})$$

$$\Rightarrow -\frac{\sqrt{۳}}{۲} \le \alpha \le \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

۷- از مثلث متساوی‌الساقین ABD داریم:

$$\hat{\alpha} = \hat{A}_۱ + \hat{D} \xrightarrow{\hat{A}_۱ = \hat{D}} \alpha = ۲\hat{D} \Rightarrow \hat{D} = \frac{\alpha}{۲} \Rightarrow \tan\hat{D} = \tan\frac{\alpha}{۲} = \frac{CA}{CD}$$

با تقسیم کردن صورت و مخرج کسر بر AB داریم:

$$\tan\frac{\alpha}{۲} = \frac{\frac{CA}{AB}}{\frac{CD}{AB}} = \frac{\frac{CA}{AB}}{\frac{CB+BD}{AB}} = \frac{\frac{CA}{AB}}{\frac{CB}{AB} + \frac{BD}{AB}}$$

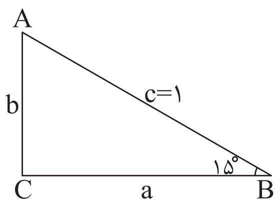
اما $\sin\alpha = \frac{CA}{AB}$ و $\cos\alpha = \frac{CB}{AB}$ و $\frac{BD}{AB} = ۱$ است. در نتیجه:

$$\tan\frac{\alpha}{۲} = \frac{\sin\alpha}{۱+\cos\alpha}$$

۸- **راه حل اول:**

با توجه به این که $\tan\frac{\alpha}{۲}=\frac{\sin\alpha}{۱+\cos\alpha}$ داریم:

$$\tan ۱۵^\circ=\frac{\sin ۳۰^\circ}{۱+\cos ۳۰^\circ}=\frac{\frac{۱}{۲}}{۱+\frac{\sqrt{۳}}{۲}}=\frac{۱}{۲+\sqrt{۳}}=۲-\sqrt{۳}$$



$$\begin{cases}\tan ۱۵^\circ=\frac{b}{a}=۲-\sqrt{۳}\Rightarrow b=a(۲-\sqrt{۳})\\ a^۲+b^۲=c^۲\Rightarrow a^۲+a^۲(۲-\sqrt{۳})^۲=۱\end{cases}$$

$$\Rightarrow a^۲=\frac{۱}{۴(۲-\sqrt{۳})}\Rightarrow a=\frac{\sqrt{۲+\sqrt{۳}}}{۲}\Rightarrow b=(\frac{\sqrt{۲+\sqrt{۳}}}{۲})(۲-\sqrt{۳})$$

$$\Rightarrow \sin ۱۵^\circ=\frac{b}{c}=\frac{\sqrt{۶}-\sqrt{۲}}{۴}\quad \text{و}\quad \cos ۱۵^\circ=\frac{a}{c}=\frac{\sqrt{۶}+\sqrt{۲}}{۴}$$

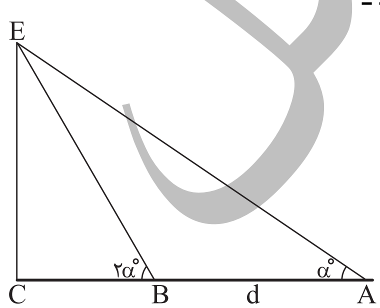
راه حل دوم:

$$\cos ۲\times ۱۵^\circ=۱-۲\sin^۲ ۱۵^\circ\Rightarrow\frac{\sqrt{۳}}{۲}=۱-۲\sin^۲ ۱۵^\circ\Rightarrow \sin ۱۵^\circ=\frac{\sqrt{۲-\sqrt{۳}}}{۲}$$

$$\Rightarrow \cos ۱۵^\circ=\frac{\sqrt{۲+\sqrt{۳}}}{۲}$$

$$\Rightarrow \tan ۱۵^\circ=\frac{\frac{\sqrt{۲-\sqrt{۳}}}{۲}}{\frac{\sqrt{۲+\sqrt{۳}}}{۲}}=۲-\sqrt{۳}$$

۹-



$$AC-BC=d$$

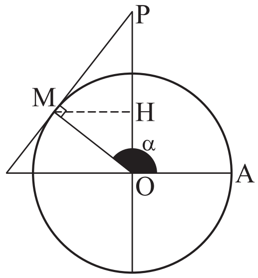
$$\frac{EC}{\tan\alpha}-\frac{EC}{\tan ۲\alpha}=d$$

$$EC(\frac{\tan ۲\alpha-\tan\alpha}{\tan\alpha.\tan ۲\alpha})=d$$

$$EC=\frac{d.\tan\alpha.\tan ۲\alpha}{\tan ۲\alpha-\tan\alpha}=\frac{d.\tan\alpha\frac{۲\tan\alpha}{۱-\tan^۲\alpha}}{\frac{۲\tan\alpha}{۱-\tan^۲\alpha}-\tan\alpha}=\frac{\frac{۲d\tan^۲\alpha}{۱-\tan^۲\alpha}}{\frac{\tan\alpha+\tan^۳\alpha}{۱-\tan^۲\alpha}}=\frac{۲d\tan^۲\alpha}{\tan\alpha+\tan^۳\alpha}$$

$$EC=\frac{۲d\tan\alpha}{۱+\tan^۲\alpha}=d\frac{۲\tan\alpha}{۱+\tan^۲\alpha}=d\sin ۲\alpha$$

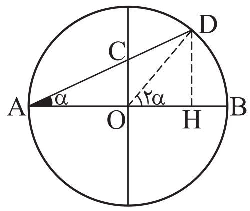
۱۰- در مثلث قائم‌الزاویه‌ی OMP می‌دانیم که MH ارتفاع وارد بر OP می‌باشد.



$$MH^{۲} = OH.PH \Rightarrow \cos^{۲}\alpha = \sin\alpha.PH$$

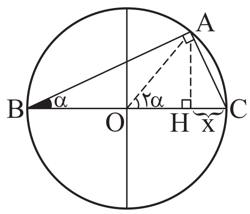
$$\Rightarrow PH = \frac{\cos^{۲}\alpha}{\sin\alpha} = \cot\alpha.\cos\alpha$$

۱۱- $\frac{CD}{CA} = \frac{OH}{OA} \Rightarrow \frac{CD}{CA} = \frac{R.\cos ۲\alpha}{R} \Rightarrow \frac{CD}{CA} = \cos ۲\alpha = ۲\cos^{۲}\alpha - ۱$



$$\Rightarrow \frac{CD}{CA} = ۲\cos^{۲}\alpha - ۱$$

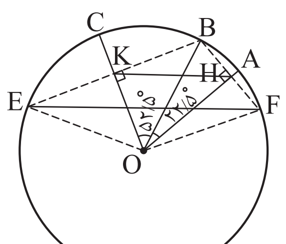
۱۳- $OH = R.\cos ۲\alpha$

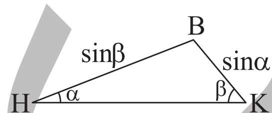


$$HC = OC - OH = R - R.\cos ۲\alpha = R(۱ - \cos ۲\alpha) = R(۲\sin^{۲}\alpha)$$

$$HC = ۲R\sin^{۲}\alpha$$

۱۴- در مثلث BHK داریم:





بنابراین HK برابر می‌گردد با:

$$HK = \sin\beta\cos\alpha + \sin\alpha\cos\beta$$

$$HK = \sin(\alpha + \beta)$$

با توجه به مثلث BEF داریم:

$$KH \parallel EF \Rightarrow \frac{KH}{EF} = \frac{BK}{BE} \Rightarrow \frac{\sin(\alpha+\beta)}{EF} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow EF = ۲\sin(\alpha+\beta)$$

پس داریم:

$$EF = ۲\sin(۵۲/۵° + ۲۲/۵°) = ۲\sin ۷۵° = ۲\times\frac{\sqrt{۶}+\sqrt{۲}}{۴} = \frac{\sqrt{۶}+\sqrt{۲}}{۲}$$

برای یافتن AH داریم:

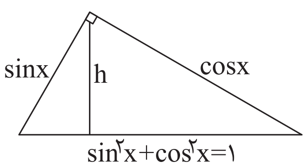
$$AH = OA - OH = ۱ - \cos\alpha = ۲\sin^{۲}\frac{\alpha}{۲}$$

۱۵- $O\overset{\Delta}{M}H \sim O\overset{\Delta}{M}P : \frac{OM}{MP} = \frac{MH}{OP} \Rightarrow \frac{۱}{\sin\alpha} = \frac{MH}{\cos\alpha} \Rightarrow MH = \cot\alpha$

۱۶- در مثلث OAC داریم:

$$AC^2 = OA^2 + OC^2 - 2OA.OC.\cos(\alpha+\beta)$$
$$AC^2 = 1+1-2\cos(\alpha+\beta)$$
$$AC^2 = 2-2\cos(\alpha+\beta)$$
$$AC^2 = 2(1-\cos(\alpha+\beta))$$
$$AC^2 = 2(2\sin^2\frac{\alpha+\beta}{2})$$
$$AC = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}$$

۱۷- می‌دانیم:



$$S = \frac{1}{2}\sin x.\cos x.\sin 90° = \frac{1}{2}(1).h$$
$$h = \sin x.\cos x \Rightarrow h = \frac{1}{2}\sin 2x$$

اگر h بخواهد ماکزیمم باشد، باید $\sin 2x = 1$ باشد. یعنی $2x = \frac{\pi}{2}$؛ در این صورت: $x = \frac{\pi}{4}$

۱۸- $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \Rightarrow (\sin x + \cos x)^2 = 2 \Rightarrow \sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x\cos x = 2$

$$\Rightarrow 2\sin x\cos x = 1 \Rightarrow \cos 2x = \pm\sqrt{1-\sin^2 2x}$$
$$\Rightarrow \cos 2x = \pm\sqrt{1-1} = 0$$

۲۲-

الف) $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha.\cos\beta - \sin\alpha.\sin\beta \xrightarrow{\beta=\alpha} \cos(\alpha+\alpha) = \cos\alpha.\cos\alpha - \sin\alpha.\sin\alpha$$
$$\Rightarrow \cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

ب) $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha.\cos\alpha$

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha.\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha \xrightarrow{\beta=\alpha} \sin(\alpha+\alpha) = \sin\alpha\cos\alpha + \sin\alpha\cos\alpha$$
$$\Rightarrow \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

ج) $\tan(\alpha-\beta) = \dfrac{\tan\alpha - \tan\beta}{1+\tan\alpha.\tan\beta}$

$$\tan(\alpha-\beta) = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)} = \frac{\sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta}$$

صورت و مخرج کسر را بر $\cos\alpha.\cos\beta$ تقسیم می‌کنیم:

$$= \frac{\dfrac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} - \dfrac{\sin\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} + \dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}} = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

چ) $\tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha.\tan\beta} \xRightarrow{\alpha=\beta} \tan(\alpha+\alpha) = \frac{\tan\alpha+\tan\alpha}{1-\tan\alpha\tan\alpha} = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

ح) $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$

$$\sin 3\alpha = \sin(2\alpha+\alpha) = \sin 2\alpha\cos\alpha + \sin\alpha\cos 2\alpha$$
$$= (2\sin\alpha\cos\alpha)\cos\alpha + \sin\alpha(1-2\sin^2\alpha)$$
$$= 2\sin\alpha.\cos^2\alpha + \sin\alpha - 2\sin^3\alpha$$
$$= 2\sin\alpha(1-\sin^2\alpha) + \sin\alpha - 2\sin^3\alpha$$
$$= 2\sin\alpha - 2\sin^3\alpha + \sin\alpha - 2\sin^3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$$

ر) $\sin(a+b).\sin(a-b) = \sin^2 a - \sin^2 b$

$$\sin(a+b).\sin(a-b) = (\sin a\cos b + \sin b\cos a)(\sin a\cos b - \sin b\cos a)$$
$$= (\sin^2 a)(\cos^2 b) - (\sin^2 b)(\cos^2 a)$$
$$= \sin^2 a(1-\sin^2 b) - \sin^2 b(1-\sin^2 a)$$
$$= \sin^2 a - \cancel{\sin^2 a}\ \cancel{\sin^2 b} - \sin^2 b + \cancel{\sin^2 a}\ \cancel{\sin^2 b} = \sin^2 a - \sin^2 b$$

س) $\sin^6\alpha + \cos^6\alpha = 1 - \dfrac{3}{4}\sin^2 2\alpha$

$$\sin^6\alpha + \cos^6\alpha = (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)^3 - 3\sin^2\alpha\cos^2\alpha(\sin^2\alpha + \sin^2\beta)$$
$$= \quad 1 \quad - 3\sin^2\alpha\cos^2\alpha = 1 - 3(\sin\alpha\cos\alpha)^2$$
$$= 1 - 3\left(\frac{\sin 2\alpha}{2}\right)^2 = 1 - \frac{3\sin^2 2\alpha}{4}$$

ص) $\tan 3\alpha = \dfrac{3\tan\alpha - \tan^3\alpha}{1-3\tan^2\alpha}$

$$\tan 3\alpha = \tan(2\alpha+\alpha) = \frac{\tan 2\alpha + \tan\alpha}{1-\tan 2\alpha.\tan\alpha} = \frac{\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} + \tan\alpha}{1 - \dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}.\tan\alpha}$$

$$= \frac{\dfrac{2\tan\alpha + \tan\alpha - \tan^3\alpha}{1-\tan^2\alpha}}{\dfrac{1-\tan^2\alpha - 2\tan^2\alpha}{1-\tan^2\alpha}} = \frac{3\tan\alpha - \tan^3\alpha}{1-3\tan^2\alpha}$$

ط) $\cot mx - \tan mx = 2\cot 2mx$

$$\cot mx - \tan mx = \frac{\cos mx}{\sin mx} - \frac{\sin mx}{\cos mx} = \frac{\cos^2 mx - \sin^2 mx}{\sin mx . \cos mx} = \frac{\cos 2mx}{\frac{1}{2}\sin 2mx} = 2\cot 2mx$$

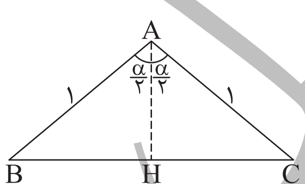
ظ) $4\sin x . \sin(60 - x) . \sin(60 + x) = \sin 3x$

$$\begin{aligned}
4\sin x . \sin(60 - x) . \sin(60 + x) &= 4\sin x(\sin 60 \cos x - \sin x \cos 60)(\sin 60 \cos x + \sin x \cos 60) \\
&= 4\sin x(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x)(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x) \\
&= 4\sin x(\frac{3}{4}\cos^2 x - \frac{1}{4}\sin^2 x) \\
&= 4\sin x(\frac{3(1-\sin^2 x)}{4} - \frac{1}{4}\sin^2 x) = \\
&= 4\sin x(\frac{3 - 4\sin^2 x}{4}) = 3\sin x - 4\sin^3 x = \sin 3x
\end{aligned}$$

ف) $\cos\frac{\pi}{24} . \cos\frac{5\pi}{24} . \cos\frac{7\pi}{24} . \cos\frac{11\pi}{24} = \frac{1}{16}$

$$\begin{aligned}
\cos\frac{\pi}{24} . \cos\frac{5\pi}{24} . \cos\frac{7\pi}{24} . \cos\frac{11\pi}{24} &= (\cos\frac{\pi}{24} . \cos\frac{11\pi}{24})(\cos\frac{5\pi}{24} . \cos\frac{7\pi}{24}) \\
&= (\cos\frac{\pi}{24} . \sin\frac{\pi}{24})(\cos\frac{5\pi}{24} . \sin\frac{5\pi}{24}) \\
&= (\frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{24})(\frac{1}{2}\sin\frac{10\pi}{24}) = \frac{1}{4}\sin\frac{\pi}{12} . \sin\frac{5\pi}{12} \\
&= \frac{1}{4}\sin\frac{\pi}{12} . \cos\frac{\pi}{12} = \frac{1}{4}(\frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{12}) = \frac{1}{8}\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{8}(\frac{1}{2}) = \frac{1}{16}
\end{aligned}$$

-۲۴



$$S_{ABC} = S_{AHC} + S_{ABH}$$

$$\frac{1}{2}(AB)\,(AC)\sin\alpha = \frac{1}{2}(AH)\,(HC) + \frac{1}{2}(AH)\,(BH)$$

$$\frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times \sin\alpha = \frac{1}{2}(\cos\frac{\alpha}{2})(\sin\frac{\alpha}{2}) + \frac{1}{2}(\cos\frac{\alpha}{2})(\sin\frac{\alpha}{2})$$

$$\frac{1}{2}\sin\alpha = \cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2} \Rightarrow \sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2} . \cos\frac{\alpha}{2}$$

-۲۵

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2(AB)(AC)\cos\alpha = 1^2 + 1^2 - 2(1)(1)\cos\alpha = 2 - 2\cos\alpha$$

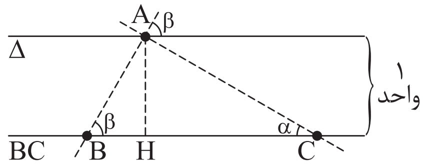
از طرفی داریم:

$$BC = BH + HC = AB\sin\frac{\alpha}{2} + AC\sin\frac{\alpha}{2} = \sin\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\alpha}{2} = 2\sin\frac{\alpha}{2} \Rightarrow BC^2 = 4\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

در نتیجه داریم:

$$BC^2 = BC^2 \Rightarrow 2 - 2\cos\alpha = 4\sin^2\frac{\alpha}{2} \Rightarrow 1 - \cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

۲۶- برای رسم این مثلث: ابتدا خط BC را رسم می‌کنیم. سپس خطی به موازات BC به نام Δ در فاصله‌ی ۱ واحدی آن رسم می‌کنیم. سپس از نقطه‌ی دلخواه روی خط BC (به نام C) خطی با زاویه‌ی α رسم می‌کنیم تا خط موازی را در نقـطه‌ی A قطع کند و از نقطه‌ی A با زاویه‌ی β خطی رسم می‌کنیم تا خط BC را در نقطه‌ی B قطع نماید.



$$S_{ABC}=\frac{۱}{۲}AB.AC.\sin(\pi-(\alpha+\beta))=\frac{۱}{۲}AB.AC.\sin(\alpha+\beta)$$

$$S_{AHB}=\frac{۱}{۲}AH.HB=\frac{۱}{۲}HB=\frac{۱}{۲}AH\cot\beta=\frac{۱}{۲}\frac{\cos\beta}{\sin\beta}$$

$$S_{AHC}=\frac{۱}{۲}AH.HC=\frac{۱}{۲}HC=\frac{۱}{۲}AH\cot\alpha=\frac{۱}{۲}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

I) $\dfrac{AH}{AB}=\sin\beta \Rightarrow AB=\dfrac{۱}{\sin\beta}$

II) $\dfrac{AH}{AC}=\sin\alpha \Rightarrow AC=\dfrac{۱}{\sin\alpha}$

$$S_{ABC}=S_{AHB}+S_{AHC}\Rightarrow \frac{۱}{۲}AB.AC\sin(\alpha+\beta)=\frac{۱}{۲}\frac{\cos\beta}{\sin\beta}+\frac{۱}{۲}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$=\frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{\sin\alpha}\right)\left(\frac{۱}{\sin\beta}\right)\sin(\alpha+\beta)=\frac{۱}{۲}\left(\frac{\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta}\right)$$

$$\Rightarrow \sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha$$

۲۷-

$$S_{ABC}=\frac{۱}{۲}AC.AB=\frac{۱}{۲}(\sin\beta)(b\cos\alpha)$$

$$S_{ADB}=\frac{۱}{۲}AD.AB=\frac{۱}{۲}(b\sin\alpha)(\cos\beta)$$

$$S_{BDC}=\frac{۱}{۲}BD.BC=\frac{۱}{۲}b\sin(\beta-\alpha)$$

$$S_{BDC}=S_{ABC}-S_{ABD}\Rightarrow \frac{۱}{۲}b\sin(\beta-\alpha)=\frac{۱}{۲}b\sin\beta\cos\alpha-\frac{۱}{۲}b\sin\alpha\cos\beta$$

$$\sin(\beta-\alpha)=\sin\beta\cos\alpha-\sin\alpha\cos\beta$$

۳۱-

$$\sin ۱۸^\circ.\cos ۳۶^\circ=\frac{۲\cos ۱۸^\circ(\sin ۱۸^\circ.\cos ۳۶^\circ)}{۲\cos ۱۸^\circ}=\frac{(۲\sin ۱۸^\circ\cos ۱۸^\circ)\cos ۳۶^\circ}{۲\cos ۱۸^\circ}$$

$$=\frac{\sin ۳۶^\circ.\cos ۳۶^\circ}{۲\cos ۱۸^\circ}=\frac{\frac{۱}{۲}\sin ۷۲^\circ}{۲\cos ۱۸^\circ}=\frac{\frac{۱}{۲}\sin ۷۲^\circ}{۲\cos ۱۸^\circ}=\frac{\frac{۱}{۲}\sin(۹۰^\circ-۱۸^\circ)}{۲\cos ۱۸^\circ}=\frac{\frac{۱}{۲}\cos ۱۸^\circ}{۲\cos ۱۸^\circ}=\frac{۱}{۴}$$

۳۲-

$$f(x)=\frac{\tan ax}{۱-\tan^{۲} ax}=\frac{۱}{۲}\frac{۲\tan ax}{۱-\tan^{۲} ax}=\frac{۱}{۲}\tan ۲ax$$

دوره‌ی تناوب اصلی $T=\frac{\pi}{|۲a|}=\frac{\pi}{۲|a|}$

توجه کنید که اگر قبل از ساده کردن دوره‌ی تناوب را بیابید، برابر $\frac{\pi}{|a|}$ می‌گردد که چون $\frac{\pi}{۲|a|}$ کوچک‌تر است آن را انتخاب می‌کنیم.

۳۳-

$$\sin ۲x=\frac{۴}{۵}\Rightarrow ۲\sin x\cos x=\frac{۴}{۵}\Rightarrow\frac{۱}{\sin x\cos x}=\frac{۵}{۲}\Rightarrow\frac{\sin^{۲} x+\cos^{۲} x}{\sin x\cos x}=\frac{۵}{۲}$$

$$\Rightarrow \tan x+\cot x=\frac{۵}{۲}$$

$$\frac{\tan^{۲} x+\cot^{۲} x}{\tan^{۳} x+\cot^{۳} x}=\frac{(\tan x+\cot x)^{۲}-۲}{(\tan x+\cot x)^{۳}-۳(\tan x+\cot x)}=\frac{\frac{۲۵}{۴}-۲}{\frac{۱۲۵}{۸}-\frac{۱۵}{۲}}=\frac{۳۴}{۶۵}$$

۳۵-

$a^{۲}+b^{۲}=(a+b)^{۲}-۲ab$ و $a^{۳}+b^{۳}=(a+b)^{۳}-۳ab(a+b)$

$$\sin^{۴} x+\cos^{۴} x+\sin^{۶} x+\cos^{۶} x=\frac{۶}{۵}\Rightarrow(\sin^{۲} x)^{۲}+(\cos^{۲} x)^{۲}+(\sin^{۲} x)^{۳}+(\cos^{۲} x)^{۳}=\frac{۶}{۵}$$

$$\Rightarrow[(\sin^{۲} x+\cos^{۲} x)^{۲}-۲\sin^{۲} x\cos^{۲} x]+[(\sin^{۲} x+\cos^{۲} x)^{۳}-۳\sin^{۲} x\cos^{۲} x(\sin^{۲} x+\cos^{۲} x)]=\frac{۶}{۵}$$

$$\Rightarrow ۱-۲\sin^{۲} x\cos^{۲} x+۱-۳\sin^{۲} x\cos^{۲} x=\frac{۶}{۵}\Rightarrow -۵\sin^{۲} x\cos^{۲} x=\frac{۶}{۵}-۲=\frac{-۴}{۵}$$

$$\Rightarrow \sin^{۲} x\cos^{۲} x=\frac{۴}{۲۵}\Rightarrow ۴\sin^{۲} x\cos^{۲} x=\frac{۱۶}{۲۵}\Rightarrow(۲\sin x\cos x)^{۲}=\frac{۱۶}{۲۵}\Rightarrow\sin^{۲} ۲x=\frac{۱۶}{۲۵}$$

۳۶-

$$\tan(y-\frac{x}{۳})=\frac{۱}{۴}\Rightarrow\frac{\tan y-\tan\frac{x}{۳}}{۱+\tan y.\tan\frac{x}{۳}}=\frac{۱}{۴}\Rightarrow\frac{\tan y-\frac{۱}{۳}}{۱+\frac{۱}{۳}\tan y}=\frac{۱}{۴}\Rightarrow ۴\tan y-\frac{۴}{۳}=۱+\frac{۱}{۳}\tan y$$

$$\Rightarrow\frac{۱۱}{۳}\tan y=\frac{۷}{۳}\Rightarrow\tan y=\frac{۷}{۱۱}$$

$$\tan(y+\frac{x}{3})=\frac{\tan y+\tan\frac{x}{3}}{1-\tan y.\tan\frac{x}{3}}=\frac{\frac{7}{11}+\frac{1}{3}}{1-\frac{7}{11}\times\frac{1}{3}}=\frac{\frac{32}{33}}{\frac{26}{33}}=\frac{32}{26}=\frac{16}{13}$$

$$\alpha+\beta=\frac{5\pi}{4}\Rightarrow\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\tan(\pi+\frac{\pi}{4})=\tan\frac{\pi}{4}=1$$ ۳۷-

$$\tan\alpha+\tan\beta=1-\tan\alpha\tan\beta\Rightarrow\tan\alpha+\tan\beta+\tan\alpha\tan\beta=1$$
$$\Rightarrow(1+\tan\alpha)(1+\tan\beta)=2$$

$$\frac{(\sin x+\cos x)^2}{(\sin x-\cos x)^2}=\frac{(\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4}))^2}{(\sqrt{2}\sin(x-\frac{\pi}{4}))^2}=\frac{\sin^2(x+\frac{\pi}{4})}{\sin^2(x-\frac{\pi}{4})}=\frac{\sin^2(\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{4})}{\sin^2(\frac{\pi}{12}-\frac{\pi}{4})}=\frac{\sin^2(\frac{\pi}{3})}{\sin^2(\frac{\pi}{6})}=\frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{4}}=3$$ ۳۹-

---

$$\sin x+\cos x=\frac{1}{3}\Rightarrow(\sin x+\cos x)^2=\frac{1}{9}\Rightarrow 1+2\sin x\cos x=\frac{1}{9}$$ ۴۱-

$$\Rightarrow\sin 2x=\frac{1}{9}-1\Rightarrow\sin 2x=\frac{-8}{9}$$

$$(\cos^4 x-\sin^4 x)^2=[(\cos^2 x-\sin^2 x)(\cos^2 x+\sin^2 x)]^2=(\cos 2x\times 1)^2$$
$$=\cos^2 2x=1-\sin^2 2x=1-(\frac{-8}{9})^2=\frac{17}{81}$$

$$\frac{\sqrt{3}\cos x+\sin x}{\sin x\cos x}=4\Rightarrow\tan\frac{\pi}{3}\cos x+\sin x=4\sin x\cos x$$ ۴۲-

$$\frac{\sin\frac{\pi}{3}\cos x+\sin x\cos\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{3}}=2(2\sin x\cos x)\Rightarrow 2(\sin(\frac{\pi}{3}+x))=2\sin 2x$$

$$\frac{\pi}{3}+x=2k\pi+2x\Rightarrow x=\frac{\pi}{3}-2k\pi\xrightarrow{k\to -k}x=2k\pi+\frac{\pi}{3}$$

$$\frac{\pi}{3}+x=2k\pi+\pi-2x\Rightarrow 3x=2k\pi+\pi-\frac{\pi}{3}\Rightarrow x=\frac{2k\pi}{3}+\frac{2\pi}{9}$$

۴۳-

ب) $\sin x=-\sin 3x\Rightarrow\sin x=\sin(-3x)\Rightarrow\begin{cases}x=2k\pi+(-3x)\\ x=2k\pi+\pi-(-3x)\end{cases}$

$$\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}4x=2k\pi\Rightarrow x=\frac{k\pi}{2}\\ x=2k\pi+\pi+3x\Rightarrow -2x=2k\pi+\pi\\ \qquad\Rightarrow x=-k\pi-\frac{\pi}{2}=k\pi-\frac{\pi}{2}\end{array}\right\}$$

$\Rightarrow$ جواب $=\frac{k\pi}{2}$

ت) $\cos x=-\cos 3x \Rightarrow \cos x=\cos(\pi-3x) \Rightarrow x=2k\pi \pm (\pi-3x)$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=2k\pi+\pi-3x \Rightarrow \\ x=2k\pi-(\pi-3x) \Rightarrow \end{cases} \begin{cases} x=\dfrac{k\pi}{2}+\dfrac{\pi}{4} \\ -2x=2k\pi-\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{k\pi}{2}+\dfrac{\pi}{4} \\ x=-k\pi+\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

ج) $\tan 4x=\cot x \Rightarrow \tan 4x=\tan(\frac{\pi}{2}-x) \Rightarrow 4x=k\pi+(\frac{\pi}{2}-x) \Rightarrow 5x=k\pi+\frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow x=\frac{k\pi}{5}+\frac{\pi}{10}$$

خ) $\sin^3 \pi x+\cos^3 \pi x=0 \Rightarrow \sin^3 \pi x=-\cos^3 \pi x \Rightarrow \dfrac{\sin^3 \pi x}{\cos^3 \pi x}=\dfrac{-\cos^3 \pi x}{\cos^3 \pi x}$

$$\Rightarrow \tan^3 \pi x=-1 \Rightarrow \pi x=k\pi-\frac{\pi}{4} \Rightarrow x=k-\frac{1}{4}$$

د) $2\sin x-\tan x=0 \Rightarrow 2\sin x-\dfrac{\sin x}{\cos x}=0 \Rightarrow \dfrac{2\sin x\cos x-\sin x}{\cos x}=0$

$$\Rightarrow \sin x(2\cos x-1)=0 \Rightarrow \begin{cases} \sin x=0 \Rightarrow x=k\pi \\ \cos x=\dfrac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x=2k\pi+\dfrac{\pi}{3} \\ x=2k\pi-\dfrac{\pi}{3} \end{cases} \end{cases}$$

ذ) $\sin 2x+\sqrt{3}-2\cos x-\sqrt{3}\sin x=0 \Rightarrow 2\sin x\cos x-2\cos x-\sqrt{3}\sin x+\sqrt{3}=0$

$$\Rightarrow 2\cos x(\sin x-1)-\sqrt{3}(\sin x-1)=0$$

$$\Rightarrow (\sin x-1)(2\cos x-\sqrt{3})=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin x=1 \Rightarrow x=2k\pi+\dfrac{\pi}{2} \\ \cos x=\dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x=2k\pi \pm \dfrac{\pi}{6} \end{cases}$$

ژ) $2\cos x(\sin x+\cos x)=1 \Rightarrow 2\sin x\cos x+2\cos^2 x=1 \Rightarrow \sin 2x=1-2\cos^2 x$

$$\Rightarrow \sin 2x=-\cos 2x \Rightarrow \frac{\sin 2x}{\cos 2x}=\frac{-\cos 2x}{\cos 2x} \Rightarrow \tan 2x=-1$$

$$\Rightarrow 2x=k\pi-\frac{\pi}{4} \Rightarrow x=\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{8}$$

س) $\cos 4x.\cos x+\sin 4x.\sin x=\dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \cos(4x-x)=\dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \cos 3x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$$\Rightarrow 3x=2k\pi \pm \frac{\pi}{6} \Rightarrow x=\frac{2k\pi}{3} \pm \frac{\pi}{18}$$

ص) $\sin 2x = 2\cos x \Rightarrow 2\sin x\cos x - 2\cos x = 0 \Rightarrow 2\cos x(\sin x - 1) = 0$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \cos x = 0 \Rightarrow x = k\pi + \dfrac{\pi}{2} \\ \sin x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi + \dfrac{\pi}{2} \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{خلاصه}} x = k\pi + \frac{\pi}{2}$$

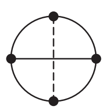
ض) $3\sin^2\frac{x}{2} + \cos x = 2 \Rightarrow 3\sin^2\frac{x}{2} + (1 - 2\sin^2\frac{x}{2}) = 2 \Rightarrow +\sin^2\frac{x}{2} = 1$

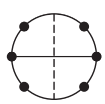
$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \sin\dfrac{x}{2} = 1 \Rightarrow \dfrac{x}{2} = 2k\pi + \dfrac{\pi}{2} \\ \sin\dfrac{x}{2} = -1 \Rightarrow \dfrac{x}{2} = 2k\pi - \dfrac{\pi}{2} \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 4k\pi + \pi \\ x = 4k\pi - \pi \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{خلاصه}} x = 2k\pi + \pi$$

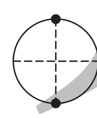
ظ) $\dfrac{\sin 7x - \sin x}{\sin 3x} = 2 \Rightarrow \dfrac{2\sin 3x.\cos 4x}{\sin 3x} = 2 \Rightarrow \cos 4x = 1 \Rightarrow 4x = 2k\pi \Rightarrow x = \dfrac{k\pi}{2}$

ولی باید توجه داشته باشد که $\sin 3x \neq 0$ باشد. پس: $3x \neq k\pi \Rightarrow x \neq \dfrac{k\pi}{3}$

در نتیجه، جواب نهایی عبارت می‌گردد از:

$x = \dfrac{k\pi}{2} \Leftrightarrow$ 

$x = \dfrac{k\pi}{3} \Leftrightarrow$ 

$$\{x = \frac{k\pi}{2}\} - \{x = \frac{k\pi}{3}\} = k\pi + \frac{\pi}{2}$$ 

غ) $2\sin(x - \frac{\pi}{8}) + 3\cos(x - \frac{5\pi}{8}) = 5 \Rightarrow (x - \frac{\pi}{8}) - (x - \frac{5\pi}{8}) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow (x - \frac{\pi}{8}) = \frac{\pi}{2} + (x - \frac{5\pi}{8})$

$$\Rightarrow \sin(x - \frac{\pi}{8}) = \sin(\frac{\pi}{2} + (x - \frac{5\pi}{8}))$$

$$\Rightarrow \sin(x - \frac{\pi}{8}) = \cos(x - \frac{5\pi}{8})$$

$$\Rightarrow 2\sin(x - \frac{\pi}{8}) + 3\sin(x - \frac{\pi}{8}) = 5 \Rightarrow 5\sin(x - \frac{\pi}{8}) = 5$$

$$\Rightarrow \sin(x - \frac{\pi}{8}) = 1 \Rightarrow x - \frac{\pi}{8} = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$$

ف) $\dfrac{\tan x(1 - \tan^2 x)}{(1 + \tan^2 x)^2} = \dfrac{1}{8} \Rightarrow \dfrac{1}{2}\dfrac{2\tan x}{1 + \tan^2 x}.\dfrac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x} = \dfrac{1}{2}(\sin 2x)(\cos 2x) = \dfrac{1}{4}\sin 4x = \dfrac{1}{8}$

$$\Rightarrow \sin 4x = \frac{1}{2} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 4x = 2k\pi + \dfrac{\pi}{6} \\ 4x = 2k\pi + \pi - \dfrac{\pi}{6} \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{k\pi}{2} + \dfrac{\pi}{24} \\ x = \dfrac{k\pi}{2} + \dfrac{5\pi}{24} \end{array}\right.$$

ک) $3\cos^2 x - \sqrt{3}\sin x\cos x = 3$

طرفین را بر $\cos^2 x$ تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{3\cos^2 x}{\cos^2 x} - \sqrt{3}\frac{\sin x\cos x}{\cos^2 x} = \frac{3}{\cos^2 x} \Rightarrow 3 - \sqrt{3}\tan x = 3(1+\tan^2 x)$$

$$\Rightarrow 3\tan^2 x + \sqrt{3}\tan x = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \tan x = 0 \\ \tan x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ x = k\pi - \frac{\pi}{6} \end{cases}$$

ل) $\sqrt{2}(\sin x + \cos x) - \sin 2x = 1$

می‌دانیم $(\sin x + \cos x)^2 = 1 + \sin 2x$ بنابراین اگر $\sin x + \cos x = y$ در نظر بگیریم، داریم:

$$\sqrt{2}y - (y^2 - 1) = 1 \Rightarrow \sqrt{2}y - y^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ y = \sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin x + \cos x = 0 \\ \sin x + \cos x = \sqrt{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin x = -\cos x \\ \sqrt{2}\sin(x + \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \tan x = -1 \\ \sin(x + \frac{\pi}{4}) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = k\pi - \frac{\pi}{4} \\ x + \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = k\pi - \frac{\pi}{4} \\ x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

و) یادآوری: $\sin^2 a - \sin^2 b = \sin(a+b)\sin(a-b)$

$$\sin^2 x + \sin^2 2x = \sin^2 3x \Rightarrow \sin^2 x = \sin^2 3x - \sin^2 2x$$

$$\Rightarrow \sin^2 x = \sin(3x + 2x)\sin(3x - 2x)$$

$$\Rightarrow \sin^2 x = \sin 5x \sin x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi \\ \sin 5x = \sin x \Rightarrow \begin{cases} 5x = 2k\pi + x \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} \\ 5x = (2k+1)\pi - x \Rightarrow x = (2k+1)\frac{\pi}{6} \end{cases} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{جواب‌ها} = \{\frac{k\pi}{2}, (2k+1)\frac{\pi}{6}\}$$

ی) $\sqrt[3]{\sin^2 x} - \sqrt[3]{\cos^2 x} = \sqrt[3]{2\cos 2x} \Rightarrow (\sqrt[3]{\sin^2 x} - \sqrt[3]{\cos^2 x})^3 = (\sqrt[3]{2\cos 2x})^3$

$$\Rightarrow (\sin^2 x - \cos^2 x) - 3\sqrt[3]{\sin^2 x}\sqrt[3]{\cos^2 x}\,(\sqrt[3]{\sin^2 x} - \sqrt[3]{\cos^2 x}) = 2\cos 2x$$

$$\Rightarrow -۳\sqrt[۳]{\sin^۲ x\cos^۲ x}\,(\sqrt[۳]{\sin^۲ x}-\sqrt[۳]{\cos^۲ x}\,)=۳\cos ۲x \Rightarrow -\sqrt[۳]{\frac{۱}{۴}\sin^۲ ۲x}\,(\sqrt[۳]{۲\cos ۲x}\,)=\cos ۲x$$

$$\Rightarrow -\frac{۲}{۴}\sin^۲ ۲x\cos ۲x=\cos^۳ ۲x \Rightarrow \cos^۳ ۲x+\frac{۱}{۲}\sin^۲ ۲x\cos ۲x=۰$$

$$\Rightarrow \cos ۲x(\cos^۲ ۲x+\frac{۱}{۲}\sin^۲ ۲x)=۰ \Rightarrow \cos ۲x=۰ \Rightarrow ۲x=k\pi+\frac{\pi}{۲} \Rightarrow x=\frac{k\pi}{۲}+\frac{\pi}{۴}$$

-۴۴

الف) $۳(\cos x-\sin x)=۱+\cos ۲x-\sin ۲x \Rightarrow ۳(\cos x-\sin x)=۲\cos^۲ x-۲\sin x\cos x$

$$\Rightarrow ۳(\cos x-\sin x)=۲\cos x(\cos x-\sin x) \Rightarrow (\cos x-\sin x)(۳-۲\cos x)=۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos x-\sin x=۰ \Rightarrow \tan x=۱ \Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{۴} \\ ۲\cos x=۳ \Rightarrow \cos x=\frac{۳}{۲} \quad \text{غ. ق. ق.} \end{cases}$$

پ) $\tan ۵x+۲\sin ۱۰x=۵\sin ۵x$

$$\frac{\sin ۵x}{\cos ۵x}+۴\sin ۵x\cos ۵x=۵\sin ۵x \Rightarrow \frac{\sin ۵x}{\cos ۵x}(۱+۴\cos^۲ ۵x-۵\cos ۵x)=۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left.\begin{aligned} &\sin ۵x=۰ \Rightarrow ۵x=k\pi \Rightarrow x=\frac{k\pi}{۵} \\ &\cos ۵x=۱ \Rightarrow ۵x=۲k\pi \Rightarrow x=\frac{۲k\pi}{۵} \end{aligned}\right\} \Rightarrow x=\frac{k\pi}{۵} \\ \cos ۵x=\frac{۱}{۴} \Rightarrow ۵x=۲k\pi \pm \operatorname{Arccos}\frac{۱}{۴} \\ \qquad \Rightarrow x=\frac{۲k\pi}{۵}\pm\frac{۱}{۵}\operatorname{Arccos}\frac{۱}{۴} \end{cases}$$

ولی باید بدانیم $\cos ۵x \neq ۰$ پس $۵x \neq k\pi+\frac{\pi}{۲}$ و $x \neq \frac{k\pi}{۵}+\frac{\pi}{۱۰}$

ث) $\tan x+\tan(x+\frac{\pi}{۴})=-۲ \Rightarrow \tan x+\frac{\tan x+۱}{۱-\tan x}=-۲$

$$\Rightarrow \tan x-\tan^۲ x+۱+\tan x=-۲+۲\tan x$$

$$\Rightarrow \tan^۲ x-۳=۰ \Rightarrow \begin{cases} \tan x=\sqrt{۳} \Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{۳} \\ \tan x=-\sqrt{۳} \Rightarrow x=k\pi-\frac{\pi}{۳} \end{cases}$$

ج) $\sin x+\sin ۲x+\sin ۳x=۰ \Rightarrow (\sin x+\sin ۳x)+\sin ۲x=۰ \Rightarrow ۲\sin ۲x\cos x+\sin ۲x=۰$

$$\Rightarrow \sin ۲x(۲\cos x+۱)=۰ \Rightarrow \begin{cases} \sin ۲x=۰ \Rightarrow ۲x=k\pi \Rightarrow x=\frac{k\pi}{۲} \\ \cos x=-\frac{۱}{۲} \Rightarrow x=۲k\pi \pm \frac{۲\pi}{۳} \end{cases}$$

ح) $\cos 9x - \cos 7x + \cos 3x - \cos x = 0 \Rightarrow -2\sin 8x \sin x - 2\sin 2x \sin x = 0$

$$\Rightarrow -2\sin x(\sin 8x + \sin 2x) = 0$$

$$\Rightarrow -4\sin x \sin 5x \cos 3x = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left.\begin{array}{l} \sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi \\ \sin 5x = 0 \Rightarrow x = \dfrac{k\pi}{5} \end{array}\right\} \Rightarrow x = \dfrac{k\pi}{5} \\ \cos 3x = 0 \Rightarrow 3x = (2k+1)\dfrac{\pi}{2} \Rightarrow x = (2k+1)\dfrac{\pi}{6} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{k\pi}{5} \\ x = (2k+1)\dfrac{\pi}{6} \end{cases}$$

خ) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = \frac{1}{2}\cot\frac{x}{2}$

با توجه به این‌که کمان‌های x ، 2x و 3x تشکیل دنباله‌ی حسابی می‌دهند و با توجه به نکته‌ی پاسخ سوال ۵۰ طرفین معادله را در $2\sin\frac{x}{2} \neq 0$ ضرب می‌کنیم و داریم:

$$2\sin\frac{x}{2}\sin x + 2\sin\frac{x}{2}\sin 2x + 2\sin\frac{x}{2}\sin 3x = \cos\frac{x}{2}$$

$$\cancel{\cos\frac{x}{2}} - \cancel{\cos\frac{3x}{2}} + \cancel{\cos\frac{3x}{2}} - \cancel{\cos\frac{5x}{2}} + \cancel{\cos\frac{5x}{2}} - \cos\frac{7x}{2} = \cancel{\cos\frac{x}{2}} \Rightarrow \cos\frac{7x}{2} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{7x}{2} = (2k+1)\frac{\pi}{2} \Rightarrow x = (2k+1)\frac{\pi}{7}$$

ذ) $\tan x \,.\, \tan 2x = \tan x + \tan 2x \Rightarrow \tan x\left(\dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x}\right) = \tan x + \dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$

$$\Rightarrow 2\tan^2 x = \tan x - \tan^3 x + 2\tan x$$

$$\Rightarrow \tan^3 x + 2\tan^2 x - 3\tan x = 0$$

$$\Rightarrow \tan x(\tan^2 x + 2\tan x - 3) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \tan x = 0 \Rightarrow x = k\pi \\ \tan x = 1 \quad \text{غ. ق. ق.} \\ \tan x = -3 \Rightarrow x = k\pi + \operatorname{Arc}\tan(-3) \end{cases}$$

ر) $\sin 7x + \cos^2 2x = \sin^2 2x + \sin x \Rightarrow \sin 7x - \sin x + (\cos^2 2x - \sin^2 2x) = 0$

$$\Rightarrow 2\sin 3x \cos 4x + \cos 4x = 0$$

$$\Rightarrow \cos 4x(2\sin 3x + 1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos 4x = 0 \Rightarrow 4x = (2k+1)\dfrac{\pi}{2} \Rightarrow x = (2k+1)\dfrac{\pi}{8} \\ \sin 3x = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} 3x = 2k\pi - \dfrac{\pi}{6} \Rightarrow x = 2k\dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{18} \\ 3x = 2k\pi + 7\dfrac{\pi}{6} \Rightarrow x = 2k\dfrac{\pi}{3} + 7\dfrac{\pi}{18} \end{cases} \end{cases}$$

-۴۵

پ) $\dfrac{\sin x+\sin ۳x-\cos x}{\cos x-\cos ۳x-\sin x}=\dfrac{(\sin x+\sin ۳x)-\cos x}{(\cos x-\cos ۳x)-\sin x}=\dfrac{۲\sin ۲x\cos(-x)-\cos x}{-۲\sin(-x)\sin(۲x)-\sin x}$

$=\dfrac{\cos x(\sin ۲x-۱)}{\sin x(۲\sin ۲x-۱)}=\cot x$

ت) $\dfrac{\sin a+\sin ۳a+۲\cos a}{(\sin a+\cos a)^۲}=\dfrac{(\sin a+\sin ۳a)+۲\cos a}{(\sin a+\cos a)^۲}=\dfrac{۲\sin ۲a\cos(-a)+۲\cos a}{(۱+\sin ۲a)}$

$=\dfrac{۲\cos a(۲\sin ۲a+۱)}{(۱+\sin ۲a)}=۲\cos a$

ج) $\dfrac{\sin\alpha-\sin ۷\alpha}{\sin(\frac{\pi}{۴}+۲\alpha)\sin(۲\alpha-\frac{\pi}{۴})}=\dfrac{۲\sin(-۳\alpha)\cos ۴\alpha}{-\frac{۱}{۲}[\cos ۴\alpha-\cos\frac{\pi}{۲}]}=\dfrac{-۲\sin ۳\alpha\cos ۴\alpha}{-\frac{۱}{۲}\cos ۴\alpha}=۴\sin ۳\alpha$

ح) $\cos ۵۰^\circ(\tan ۷۰^\circ+\tan ۱۰^\circ)=\cos ۵۰^\circ(\dfrac{\sin ۷۰^\circ}{\cos ۷۰^\circ}+\dfrac{\sin ۱۰^\circ}{\cos ۱۰^\circ})$

$=\cos ۵۰^\circ\dfrac{\sin ۷۰^\circ\cos ۱۰^\circ+\sin ۱۰^\circ\cos ۷۰^\circ}{\cos ۷۰^\circ\cos ۱۰^\circ}$

$=\cos ۵۰^\circ\dfrac{\cancel{\sin ۸۰^\circ}}{\cos ۷۰^\circ\cancel{\cos ۱۰^\circ}}=\dfrac{\cos ۵۰^\circ}{\cos ۷۰^\circ}$

$=\dfrac{\sin ۴۰^\circ}{\sin ۲۰^\circ}=\dfrac{۲\sin ۲۰^\circ\cos ۲۰^\circ}{\sin ۲۰^\circ}=۲\cos ۲۰^\circ$

د) $\dfrac{۱}{\cos ۲۰^\circ}+۲=\dfrac{۲(\cos ۲۰^\circ+\frac{۱}{۲})}{\cos ۲۰^\circ}=\dfrac{۲(\cos ۲۰^\circ+\cos ۶۰^\circ)}{\cos ۲۰^\circ}=\dfrac{۲(۲\cos ۴۰^\circ\cos ۲۰^\circ)}{\cos ۲۰^\circ}=۴\cos ۴۰^\circ$

ذ) $(\cos ۱۰^\circ-\cos ۷۰^\circ)(\tan ۷۰^\circ-\cot ۱۰۰^\circ)=(-۲\sin(-۳۰^\circ)\sin ۴۰^\circ)(\dfrac{\sin ۷۰^\circ}{\cos ۷۰^\circ}+\dfrac{\sin ۱۰^\circ}{\cos ۱۰^\circ})$

$=۲\times\frac{۱}{۲}\times\sin ۴۰^\circ\times\dfrac{\sin ۷۰^\circ\cos ۱۰^\circ+\sin ۱۰^\circ\cos ۷۰^\circ}{\cos ۱۰^\circ\cos ۷۰^\circ}$

$=\sin ۴۰^\circ\dfrac{\cancel{\sin ۸۰^\circ}}{\cancel{\cos ۱۰^\circ}\cos ۷۰^\circ}=\dfrac{\sin ۴۰^\circ}{\cos ۷۰^\circ}=\dfrac{\sin ۴۰^\circ}{\sin ۲۰^\circ}$

$=\dfrac{۲\sin ۲۰^\circ\cos ۲۰^\circ}{\sin ۲۰^\circ}=۲\cos ۲۰^\circ$

-۴۶

$(\tan ۳۵^\circ+\tan ۲۰^\circ)\sin ۲۰^\circ=\dfrac{\sin(۲۰^\circ+۳۵^\circ)}{\cos ۳۵^\circ\cos ۲۰^\circ}\sin ۲۰^\circ=\dfrac{\sin ۵۵^\circ}{\cos ۳۵^\circ}\tan ۲۰^\circ$

$=\dfrac{\cos ۳۵^\circ}{\cos ۳۵^\circ}\tan ۲۰^\circ=\tan ۲۰^\circ$

-۴۷

$(\sin ۴۷^\circ+\sin ۶۱^\circ)-(\sin ۱۱^\circ+\sin ۲۵^\circ)=۲\sin ۵۴^\circ\cos ۷^\circ-۲\sin ۱۸^\circ\cos ۷^\circ$

$=۲\cos ۷^\circ(\sin ۵۴^\circ-\sin ۱۸^\circ)=۴\cos ۷^\circ\sin ۱۸^\circ\cos ۳۶^\circ$

$=۲\cos ۷^\circ(\dfrac{۲\sin ۱۸^\circ\cos ۱۸^\circ\cos ۳۶^\circ}{\cos ۱۸^\circ})$

$=\dfrac{۲\cos ۷^\circ\sin ۳۶^\circ\cos ۳۶^\circ}{coa۱۸^\circ}=\dfrac{\cos ۷^\circ\cancel{\sin ۷۲^\circ}}{\cancel{\cos ۱۸^\circ}}=\cos ۷^\circ$

-۴۹

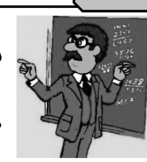
$$\sin a+\sin b=۲\sin\frac{a+b}{۲}\cos\frac{a-b}{۲}$$
$$\cos a+\cos b=۲\cos\frac{a+b}{۲}\cos\frac{a-b}{۲}$$
$$\tan a+\cot a=\frac{۲}{\sin ۲a}$$
$$\frac{۲\cos ۳x\cos ۲x}{۲\sin ۳x\cos ۲x}+\frac{۲\sin ۳x\cos ۲x}{۲\cos ۳x\cos ۲x}=\cot ۳x+\tan ۳x=\frac{۲}{\sin ۶x}$$
$$x=\frac{x}{۳۶}\Rightarrow\frac{۲}{\sin ۶x}=\frac{۲}{\sin\frac{\pi}{۶}}=۴$$

-۵۰ سمت چپ تساوی را در $۲\sin\frac{\pi}{۱۴}$ ضرب و تقیسم کرده، صورت را به جمع تبدیل می‌کنیم.

$$\text{سمت چپ}=\frac{۲\sin\frac{\pi}{۱۴}\sin\frac{\pi}{۷}+۲\sin\frac{\pi}{۱۴}\sin\frac{۲\pi}{۷}+۲\sin\frac{\pi}{۱۴}\sin\frac{۳\pi}{۷}}{۲\sin\frac{\pi}{۱۴}}$$

$$=\frac{\cos\frac{\pi}{۱۴}-\cancel{\cos\frac{۳\pi}{۱۴}}+\cancel{\cos\frac{۳\pi}{۱۴}}-\cancel{\cos\frac{۵\pi}{۱۴}}+\cancel{\cos\frac{۵\pi}{۱۴}}-\cancel{\cos\frac{۷\pi}{۱۴}}}{۲\sin\frac{\pi}{۱۴}}=\frac{\cos\frac{\pi}{۱۴}}{۲\sin\frac{\pi}{۱۴}}=\frac{۱}{۲}\cot\frac{\pi}{۱۴}$$

نکته:



برای محاسبه‌ی مجموع سینوس‌ها، یا کسینوس‌ها که کمان‌های آن‌ها تشکیل تصاعد حسابی با قدر نسبت d دهند یک راه حل، ضرب و تقسیم مجموع در $۲\sin\frac{d}{۲}$ و تبدیل صورت به حاصل‌جمع است. به عنوان مثال در این تمرین کمان‌ها $\frac{\pi}{۷}$، $\frac{۲\pi}{۷}$ و $\frac{۳\pi}{۷}$ هستند. یعنی $d=\frac{\pi}{۷}$ ، پس ما مجموع را در $۲\sin\frac{d}{۲}=۲\sin\frac{\pi}{۱۴}$ ضرب و تقسیم کردیم. حال یک مثال دیگر حل می‌کنیم. فرض کنید می‌خواهیم مجموع $\cos\frac{۲\pi}{۷}+\cos\frac{۴\pi}{۷}+\cos\frac{۶\pi}{۷}=A$ را محاسبه کنیم. کمان‌ها تشکیل تصاعد حسابی با $d=\frac{۲\pi}{۷}$ می‌دهند، پس مجموع را در $۲\sin\frac{\pi}{۷}$ ضرب و تقسیم می‌کنیم.

$$A=\frac{۲\sin\frac{\pi}{۷}\cos\frac{۲\pi}{۷}+۲\sin\frac{\pi}{۷}\cos\frac{۴\pi}{۷}+۲\sin\frac{\pi}{۷}\cos\frac{۶\pi}{۷}}{۲\sin\frac{\pi}{۷}}$$

$$=\frac{\cancel{\sin\frac{۳\pi}{۷}}-\sin\frac{\pi}{۷}+\cancel{\sin\frac{۵\pi}{۷}}-\cancel{\sin\frac{۳\pi}{۷}}+\cancel{\sin\frac{۷\pi}{۷}}-\cancel{\sin\frac{۵\pi}{۷}}}{۲\sin\frac{\pi}{۷}}=\frac{-\cancel{\sin\frac{\pi}{۷}}}{۲\cancel{\sin\frac{\pi}{۷}}}=-\frac{۱}{۲}$$

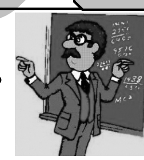
۵۵-
$$a\sin x+b\cos x=c\Rightarrow a\frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}+b\frac{(1-\tan^2\frac{x}{2})}{1+\tan^2\frac{x}{2}}=c$$
$$\Rightarrow 2a\tan\frac{x}{2}+b-b\tan^2\frac{x}{2}=c+c\tan^2\frac{x}{2}$$
$$\Rightarrow (c+b)\tan^2\frac{x}{2}-2a\tan\frac{x}{2}+(c-b)=0$$

اگر این معادله یک ریشه دارد، پس $\Delta=0$ است.

$$(-2a)^2-4(c+b)(c-b)=0\Rightarrow 4a^2-4(c^2-b^2)=0\Rightarrow a^2+b^2=c^2$$

۵۷-
$$f(x)=\sin x-\sin 3x+2$$

نکته:



دوره‌ی تناوب عبارات ضرب $\sin$ و $\cos$ را بعد از تبدیل به جمع می‌یابیم.

$$f(x)=-\frac{1}{2}[\cos 4x-\cos(-2x)]=-\frac{1}{2}[\cos 4x-\cos 2x]$$
$$\begin{cases}T_1=\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}\\ T_2=\frac{2\pi}{2}=\pi\end{cases}\Rightarrow T_{\text{کل}}=\frac{\text{ک. م. م. صورت‌ها}}{\text{ب. م. م. مخرج‌ها}}=\frac{\pi}{1}=\pi$$

۵۹-
$$\tan 2\alpha=\tan((\alpha+\beta)+(\alpha-\beta))=\frac{\tan(\alpha+\beta)+\tan(\alpha-\beta)}{1-\tan(\alpha+\beta)\tan(\alpha-\beta)}=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}}=\frac{\frac{5}{6}}{\frac{5}{6}}=1$$

۶۰-
$$\frac{2(\sin(\alpha+\beta)-\frac{1}{2})}{\cos\alpha\cos\beta}=\frac{2(2\sin\frac{\alpha+\beta-\frac{\pi}{6}}{2}\cos\frac{\alpha+\beta+\frac{\pi}{6}}{2})}{\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]}=\frac{4\sin\frac{\alpha+\beta-\frac{\pi}{6}}{2}\cos\frac{\alpha+\beta+\frac{\pi}{6}}{2}}{\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\frac{1}{2}]}$$
$$=\frac{4\sin\frac{\alpha+\beta-\frac{\pi}{6}}{2}\cos\frac{\alpha+\beta+\frac{\pi}{6}}{2}}{\frac{1}{2}[2\cos\frac{\alpha+\beta+\frac{\pi}{6}}{2}\cos\frac{\alpha+\beta-\frac{\pi}{6}}{2}]}=\frac{4\sin\frac{\alpha+\beta-\frac{\pi}{6}}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta-\frac{\pi}{6}}{2}}$$
$$=4\tan\frac{\alpha+\beta-\frac{\pi}{6}}{2}=4\tan\frac{(\beta+\frac{\pi}{6})+\beta-\frac{\pi}{6}}{2}=4\tan\beta$$

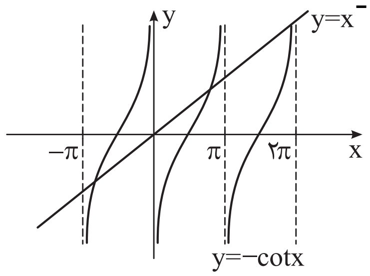
-۶۴ $\frac{۱}{۲}[\sin(ax+bx)+\cancel{\sin(ax-bx)}]=\frac{۱}{۲}[\sin(cx+dx)+\cancel{\sin(cx-dx)}]$

با توجه به این‌که a ، b ، c و d جملات متوالی یک تصاعد عددی‌اند. پس: $c-d=a-b$

$\sin(ax+bx)=\sin(cx+dx)$

$$\begin{matrix}(a+b)x=۲k\pi+(c+d)x\\(a+b)x=۲k\pi+\pi-(c+d)x\end{matrix}\Rightarrow\begin{cases}(a-c+b-d)x=۲k\pi\\(a+b+c+d)x=۲k\pi+\pi\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{۲k\pi}{a-c+b-d}\\x=\dfrac{۲k\pi+\pi}{a+b+c+d}\end{cases}$$

-۶۷



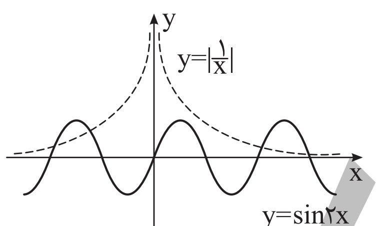
$x\sin x+\cos x=\circ$

$x\sin x=-\cos x$

$x=-\cot x$

این معادله بی‌شمار ریشه دارد.

-۶۹

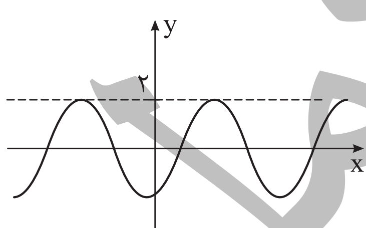


$|x|\sin ۲x=۱$

$\sin ۲x=|\frac{۱}{x}|$

این معادله بی‌شمار ریشه دارد.

-۷۰

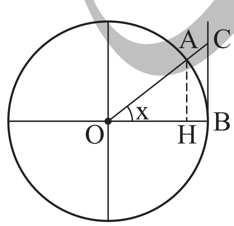


$$y=\cot\frac{\pi}{۶}\sin x-\cos x=\frac{\cos\frac{\pi}{۶}\sin x-\cos x\sin\frac{\pi}{۶}}{\sin\frac{\pi}{۶}}$$

$$=\frac{\sin(x-\frac{\pi}{۶})}{\frac{۱}{۲}}=y=۲\sin(x-\frac{\pi}{۶})$$

این معادله در بازه‌ی $[\circ,۲\pi]$ یک ریشه دارد.

-۷۱ با توجه به شکل داریم:



$AH<\overset{\frown}{AB}<CB$

$\sin x<\sin^{-۱}x<\tan x$

-۷۲

الف) $f(x)=۲\sin x+۱\Rightarrow y=۲\sin x+۱\Rightarrow \sin x=\frac{y-۱}{۲}\Rightarrow x=\sin^{-۱}(\frac{y-۱}{۲})$

$$\Rightarrow y=\sin^{-۱}(\frac{x-۱}{۲})$$

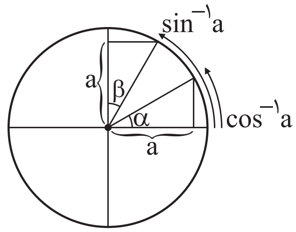
ب) $f(x)=\dfrac{\sin x}{2\sin x-1}\Rightarrow y=\dfrac{\sin x}{2\sin x-1}\Rightarrow 2y\sin x-y=\sin x\Rightarrow(2y-1)\sin x=y$

$$\Rightarrow \sin x=\frac{y}{2y-1}\Rightarrow x=\sin^{-1}(\frac{y}{2y-1})$$

$$\Rightarrow y=\sin^{-1}(\frac{x}{2x-1})$$

-۷۳

الف) $\sin^{-1}a+\cos^{-1}a=\dfrac{\pi}{2}\qquad(0<a<1)$



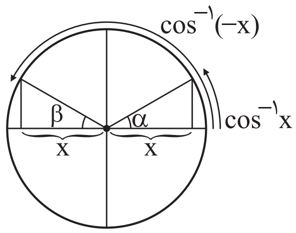
با توجه به تساوی در مثلث می‌توان گفت: $\alpha=\beta$

از طرفی داریم:

$$\cos^{-1}a+\sin^{-1}a=\alpha+(\frac{\pi}{2}-\beta)=\alpha+(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\frac{\pi}{2}$$

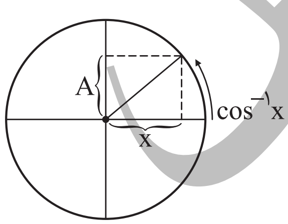
پ) $\alpha=\beta\Rightarrow\cos^{-1}(-x)=\pi-\beta=\pi-\alpha$

$$\cos^{-1}(-x)=\pi-\cos^{-1}x$$



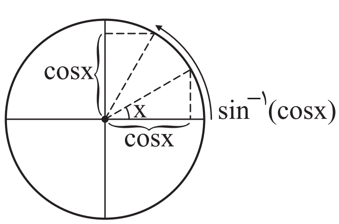
ث) $\sin(\cos^{-1}x)=\cos(\sin^{-1}x)=\sqrt{1-x^2}$

$$A=\sin(\cos^{-1}x)=\sqrt{1^2-x^2}=\sqrt{1-x^2}$$



همین استدلال برای $\cos(\sin^{-1}x)=\sqrt{1-x^2}$ نیز می‌توان استفاده نمود.

۷۴- همان‌طور که در شکل مشاهده می‌کنید، داریم:



$$\sin^{-1}(\cos x)=\frac{\pi}{2}-x$$

و همین استدلال را در مورد $\cos^{-1}(\sin x)=\dfrac{\pi}{2}-x$ نیز می‌توان به‌کار برد.

-۷۶

$$\tan^{-1}\frac{x-y}{1+xy}=\underbrace{\tan^{-1}x}_{\alpha}-\underbrace{\tan^{-1}y}_{\beta}$$

$$\left.\begin{array}{l}\tan^{-1}x=\alpha\Rightarrow\tan\alpha=x\\ \tan^{-1}y=\beta\Rightarrow\tan\beta=y\end{array}\right\}\Rightarrow\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}\Rightarrow\tan(\alpha-\beta)=\frac{x-y}{1+xy}$$

$$\Rightarrow\tan^{-1}\frac{x-y}{1+xy}=\alpha-\beta\Rightarrow\tan^{-1}\frac{x-y}{1+xy}=\tan^{-1}x-\tan^{-1}y$$

-۷۷

$$\underbrace{\cos^{-1}(1-2t^2)}_{\alpha}=2\underbrace{\sin^{-1}(t)}_{\beta}\Rightarrow\begin{cases}\cos\alpha=1-2t^2\\ \sin\beta=t\end{cases}\Rightarrow\alpha=2\beta\Rightarrow\cos\alpha=\cos2\beta$$

$$\Rightarrow1-2t^2=1-2\sin^2\beta\Rightarrow1-2t^2=1-2t^2$$

-۷۹

الف) $\tan(\frac{3\pi}{4}-\tan^{-1}(\frac{3}{2}))=\tan(\frac{3\pi}{4}-\underbrace{\tan^{-1}(\frac{3}{2})}_{\alpha})$

$$\xrightarrow{\alpha=\tan^{-1}(\frac{3}{2})\text{ و }\tan\alpha=\frac{3}{2}}\tan(\frac{3\pi}{4}-\alpha)=\frac{\tan\frac{3\pi}{4}-\tan\alpha}{1+\tan\frac{3\pi}{4}\tan\alpha}$$

$$=\frac{-1-\frac{3}{2}}{1+(-1)(\frac{3}{2})}=\frac{-\frac{5}{2}}{-\frac{1}{2}}=5$$

ب) $\tan^{-1}(\frac{1}{2})+\tan^{-1}(\frac{1}{3})=\underbrace{\tan^{-1}(\frac{1}{2})}_{\alpha}+\underbrace{\tan^{-1}(\frac{1}{3})}_{\beta}=\alpha+\beta\Rightarrow\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$

$$=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}}=\frac{\frac{5}{6}}{\frac{5}{6}}=\tan(\alpha+\beta)=1\Rightarrow\alpha+\beta=\frac{\pi}{4}$$

$$\begin{cases}\alpha=\tan^{-1}\frac{1}{2}\Rightarrow\tan\alpha=\frac{1}{2}\\ \beta=\tan^{-1}\frac{1}{3}\Rightarrow\tan\beta=\frac{1}{3}\end{cases}$$

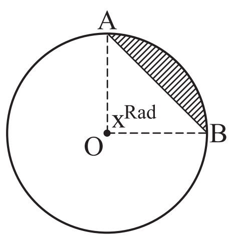
ت) $\sin(\cos^{-1}(-\frac{3}{5}))=\sin(\pi-\cos^{-1}(-\frac{3}{5}))=\sin(\underbrace{\cos^{-1}(\frac{3}{5})}_{\alpha})=\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-(\frac{3}{5})^2}=\frac{4}{5}$

$$\alpha=\cos^{-1}(\frac{3}{5})\Rightarrow\cos\alpha=\frac{3}{5}$$

ح) $\cos(\frac{۱}{۲}\cos^{-۱}(\frac{۱}{۱۰})) = \cos(\frac{۱}{۲}\underbrace{\cos^{-۱}(\frac{۱}{۱۰})}_{\alpha}) = \cos(\frac{۱}{۲}\alpha) = \sqrt{\frac{۱+\cos\alpha}{۲}} = \sqrt{\frac{۱+\frac{۱}{۱۰}}{۲}} = \sqrt{\frac{۱۱}{۲۰}}$

$$= \cos^{-۱}(\frac{۱}{۱۰}) = \alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{۱}{۱۰}$$

۸۱- الف) OAB مساحت $= \frac{\text{کمان}}{\text{محیط}} \times$ مساحت دایره $= \frac{x^{Rad}}{۲\pi}\times \pi r^۲ = \frac{xr^۲}{۲}$



OAB مساحت مثلث $= \frac{۱}{۲}r.r.\sin x = \frac{۱}{۲}r^۲\sin x$

مساحت قطاع $= \frac{xr^۲}{۲} - \frac{۱}{۲}r^۲\sin x = \frac{۱}{۲}r^۲(x-\sin x)$

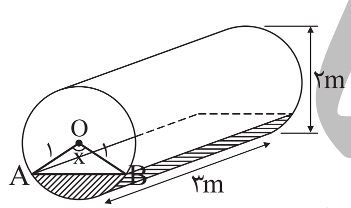
ب) $AB^۲ = OA^۲ + OB^۲ - ۲OA.OB\cos x \Rightarrow AB^۲ = r^۲ + r^۲ - ۲r^۲\cos x$

$$\Rightarrow AB^۲ = ۲r^۲ - ۲r^۲\cos x = ۲r^۲(۱-\cos x) = ۲r^۲(۲\sin^۲\frac{x}{۲})$$

$$\Rightarrow AB^۲ = ۴r^۲\sin^۲\frac{x}{۲} \Rightarrow AB = ۲r\sin\frac{x}{۲}$$

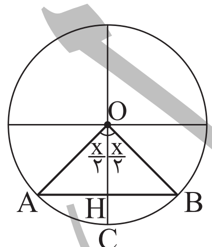
ت) $AB = ۲r\sin\frac{x}{۲} \Rightarrow \frac{AB}{۲r} = \sin\frac{x}{۲} \Rightarrow \frac{x}{۲} = \sin^{-۱}\frac{AB}{۲r} \Rightarrow x = ۲\sin^{-۱}\frac{AB}{۲r}$

۸۲- الف) $V = (\frac{\text{کمان}}{\text{محیط}} \times$ ارتفاع $\times$ مساحت دایره$) - (\frac{۱}{۲}\sin x \times$ ارتفاع$)$



$$V = (\frac{x}{۲\pi}\times \pi r^۲ \times ۳) - (\frac{۳}{۲}\sin x) = \frac{۳}{۲}(x - \sin x)$$

با توجه به دایره داریم: $(۰ \le h < ۱)$



$$HC = OC - OH \Rightarrow h = ۱ - \cos\frac{x}{۲}$$

$$h = ۱-\cos\frac{x}{۲} \Rightarrow \cos\frac{x}{۲} = ۱-h \Rightarrow \frac{x}{۲} = \cos^{-۱}(۱-h)$$

$$\Rightarrow x = ۲\cos^{-۱}(۱-h)$$

بنابراین با جایگذاری x در رابطه‌ی V داریم: $V = \frac{۳}{۲}(۲\cos^{-۱}(۱-h) - \sin(۲\cos^{-۱}(۱-h))$

ب) **روش اول محاسبه:**

$$AB^۲ = ۲(۱-\cos x) \Rightarrow AB = ۲\sin\frac{x}{۲} \Rightarrow AB = ۲\sin\frac{۲\cos^{-۱}(۱-h)}{۲} \Rightarrow AB = ۲\sin(\cos^{-۱}(۱-h))$$

$$S = AB\times d = ۲\sin(\cos^{-۱}(۱-h))\times ۳ = ۶\sin(\cos^{-۱}(۱-h)) = ۶\sqrt{۱-(۱-h)^۲}$$

روش دوم محاسبه:

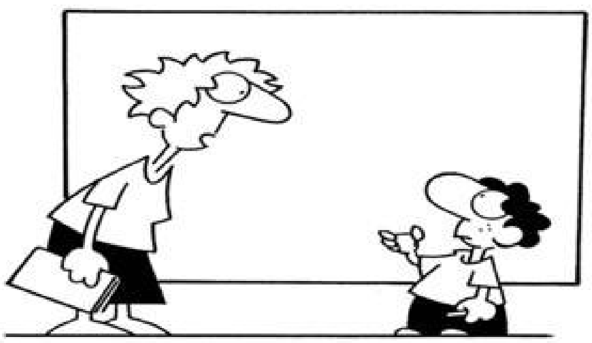
در مثلث OHB داریم: $AB = ۲HB = ۲\sqrt{OB^۲ - OH^۲} = ۲\sqrt{۱^۲ - (۱-HC)^۲} = ۲\sqrt{۱-(۱-h)^۲}$

فصل چهارم

حد توابع و پیوستگی

نویسندگان و ویراستاران:استادان هاشملی و بیات

اشتباه خنده دار یک دانش آموز در ریاضی



After explaining to a student through various lessons and examples that:

$$\underset{x \to 8}{\mathrm{LIM}} \frac{1}{x-8} = \infty$$

I tried to check if she really understood that, so I gave her a different example. This was the result:

$$\underset{x \to 5}{\mathrm{LIM}} \frac{1}{x-5} = \rotatebox{90}{5}$$

فصل چهارم
حـد و پیوستگی توابع

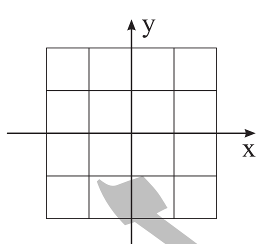
مفهوم حـد ، حـد راست و چپ

۱- جدول زیر را کامل کنید و نشان دهید تابع $f(x)$ در $x=1$ دارای حد معینی است که مقدار آن را به دست می‌آورید.

$\lim\limits_{x\to 1} f(x)$	جدول	تابع
	x: ۰/۹ ، ۰/۹۹ ، ۰/۹۹۹ ، ۱ ، ۱/۰۰۱ ، ۱/۰۱ ، ۱/۱ f(x):	$f(x)=x+1$
	x: ۰/۹ ، ۰/۹۹ ، ۰/۹۹۹ ، ۱ ، ۱/۰۰۱ ، ۱/۰۱ ، ۱/۱ f(x): ?	$f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$

۲- با رسم نمودار $f(x)$ وجود حد تابع را در $x=1$ بررسی کنید.

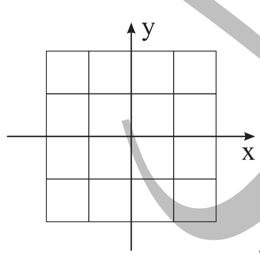
$$f(x)=\begin{cases} 2x-1 & x>1 \\ 2-x & x<1 \end{cases}$$



۳- با رسم نمودار $f(x)$، وجود حد تابع را در $x=2$ بررسی کنید.

$$f(x)=[x]+[-x]$$

(علامت [ ] به معنی جزء صحیح است.)



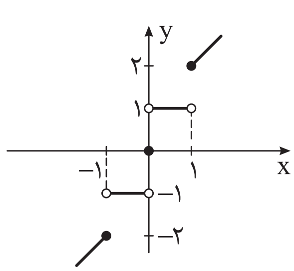
۴- با توجه به نمودار $f(x)$ (مطابق شکل روبه‌رو) مقادیر خواسته‌شده را به دست آورید.

الف) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$

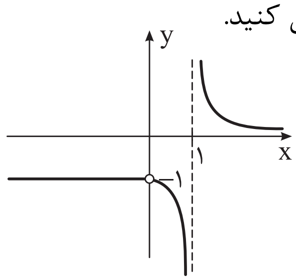
ب) $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)$

پ) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

ت) $f(\frac{1}{2})$



۵- اگر نمودار $f(x)$ شکل روبه‌رو باشد، وجود یا عدم وجود حدهای زیر را بررسی کنید.



الف) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$

ب) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

۶- نمودار تابع $f(x)$ را با دامنه‌ی $[-2,2]$ و با توجه به همه شرایط زیر رسم کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=1$ ب) $f(-1)=2$ پ) $f(-2)=0$

ت) $f(0)=0$ ث) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=1$ ج) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=0$

چ) $f(2)=0$ ح) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=0$ خ) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=0$

۷- حد توابع زیر را در $x=0$ در صورت موجود بودن محاسبه کنید.

الف) $f(x)=\sqrt{x}$ ب) $g(x)=\sqrt{-x}$ پ) $h(x)=\sqrt{x}+\sqrt{-x}$

*۸- آیا توابع زیر در $x=1$ دارای حد می‌باشند؟

الف) $f(x)=\dfrac{x-1}{[x-1]}$ *ب) $g(x)=\dfrac{[x-1]}{x-1}$

۹- کدام مورد زیر درست است؟ علت آن را توضیح دهید.

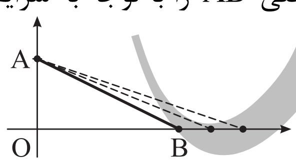
الف) اگر حد چپ و حد راست تابع $f(x)$ در $x=a$ موجود باشد، تابع در این نقطه دارای حد است.

ب) اگر حد چپ تابع $f(x)$ در $x=a$ موجود و حد راست آن (موجود نباشد)، حد در این نقطه می‌تواند وجود داشته باشد.

پ) اگر فقط حد راست تابع $f(x)$ در یک نقطه معین موجود باشد، حد تابع $f(x)$ در این نقطه موجود است.

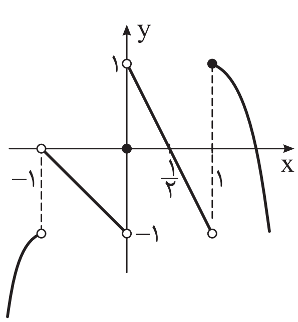
۱۰- وجود حد تابع $f(x)=[x+1]$ را در $x=2$ بررسی کنید.

۱۱- مطابق شکل زیر اتومبیل A در فاصله‌ی یک کیلومتری یک تقاطع قائم پارک شده و اتومبیل B به سمت نقطه‌ی O و از سمت راست آن در حرکت است. فاصله‌ی این دو اتومبیل یعنی AB را با توجه به شرایط زیر محاسبه کنید.



الف) $\lim\limits_{OB\to 2\sqrt{2}} (AB)$ ب) $\lim\limits_{OB\to 0^+} (AB)$

۱۲- با توجه به نمودار تابع $f(x)$ در شکل مقابل، مقدار $\lim\limits_{x\to 0^+} (fof)(x)$ را به دست آورید.



۱۳- اگر $f(x)=\sin\dfrac{\pi}{x}$ فرض شود، حاصل $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ را به دست آورید.

حــد و همسایگی

۱۴- کدام‌یک از بازه‌های زیر یک همسایگی متقارن عدد حقیقی ۱ محسوب می‌شود؟

الف) $(1, 3)$ ب) $(0, 2)$

۱۵- کدام‌یک از بازه‌های زیر همسایگی متقارن عدد ۳ می‌باشد؟

الف) $(-3, 3)$ ب) $(0, 6)$

*۱۶- نشان دهید نامساوی $-4 < x < 6$ همسایگی متقارن عدد ۱ با شعاع همسایگی ۵ است.

۱۷- کدام‌یک از مجموعه‌های زیر همسایگی متقارن محذوف عدد حقیقی ۱ به شمار می‌رود؟

الف) $(-1, 2) \cup (1, 3)$

ب) $\{x \mid \frac{1}{|x-1|} > \frac{1}{2}\}$

پ) $\{x \mid (|x-1|-1)(|x|+1) < 0\}$

*۱۸- دامنه‌ی کدام تابع زیر همسایگی متقارن محذوف نقطه‌ی صفر است؟

الف) $f(x) = \sqrt{3 - x^2}$ ب) $g(x) = \sqrt{\frac{4 - x^2}{|x|}}$

۱۹- کدام‌یک از توابع زیر فقط در همسایگی راست $x = 1$ تعریف شده است؟

الف) $f(x) = \frac{1}{x-1}$ ب) $g(x) = \sqrt{1 - x^2}$ پ) $h(x) = \sqrt{\frac{x-1}{2-x}}$

۲۰- نامساوی $a < x < b$ را به صورت همسایگی متقارن $|x - \alpha| < \delta$ می‌نویسیم. α و δ را مشخص کنید.

*۲۱- اگر همسایگی نقطه‌ی a و شعاع همسایگی δ به صورت $|2x + 1| < 3$ باشد، a و δ را به دست آورید.

۲۲- در یک همسایگی محذوف متقارن به صورت $(3a - 7, a + 5) - \{3\}$ شعاع همسایگی کدام است؟

(سراسری – ۸۹)

الف) ۱ ب) ۲ پ) ۳ ت) ۴

۲۳- در هر یک از موارد زیر نمودار تابعی مانند $f(x)$ را با توجه به ویژگی‌های زیر رسم کنید.

الف) حد راست آن در $x = 1$ برابر صفر است ولی در خود $x = 1$ تعریف نشده است.

ب) تابع در $x = 1$ تعریف شده است، اما در هیچ همسایگی $x = 1$ تعریف نشده است.

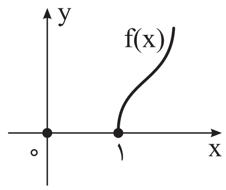
*۲۴- جواب نامعادله‌ی $|x^3 + 8| < x^2 - 2x + 4$ را چگونه به صورت همسایگی محذوف یا همسایگی محذوف متقارن می‌توان نوشت؟ مرکز و شعاع همسایگی را به دست آورید.

۲۵- اگر $(a - b, b) \cup (a, a + 3)$ معادل یک همسایگی محذوف متقارن باشد، a و b چه‌قدر است؟

۲۶- تابع $f(x)=\sqrt{x^{۳}-x^{۲}}$ را در نظر می‌گیریم. این تـابع در کدام نقطه فقط در همسایگی راست آن نقطه تعریف شده است؟

$f(x)$ در کدام نقطه تعریف شده است، اما در آن نقطه حد ندارد؟

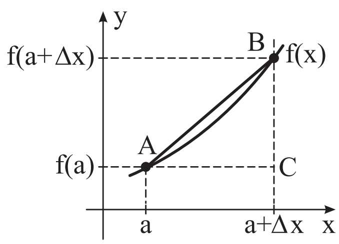
آیا محاسبات شما با نمودار $f(x)$ که شکل روبه‌رو است، مطابقت دارد؟



۲۷-* اگر اجتماع دو همسایگی متقارن به مرکز ۱ و ۲ ، یک همسایگی محذوف متقارن به مرکز a و شعاع r باشد، حاصل $a+r$ را مشخص کنید.

شیب خط مماس و معادله‌ی خط مماس

۲۸-* شیب خط مماس بر منحنی f در نقطه‌ی $x=a$ چه‌قدر است؟

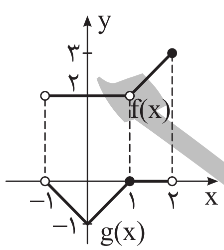


قضایای حد و محاسبه‌ی حـد توابع

۲۹- اگر نمودارهای دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ به صورت روبه‌رو باشد، حاصل حدهای زیر را بیابید.

الف) $\lim\limits_{x\to ۱}(f+g)(x)$ ب) $\lim\limits_{x\to ۰}(f\times g)(x)$

پ) $\lim\limits_{x\to -۱^{+}}(\frac{g}{f})(x)$ ت) $\lim\limits_{x\to ۲^{-}}(\frac{f}{g})(x)$



۳۰- حاصل حدهای زیر را به دست آورید.

الف) $\lim\limits_{x\to ۰} x\sin(x+\frac{\pi}{۳})=$

* ب) $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{۶}} \frac{۳+\sqrt{۳}\cos x}{۱+\sin x}=$

۳۱- حاصل حدهای زیر را به دست آورید.

الف) $\lim\limits_{x\to ۳^{+}} \sqrt[۴]{x-۳}=$

* ب) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۲}} \sqrt{۱-\sin x}=$

۳۲- در صورت وجود، حاصل حدهای زیر را به دست آورید.

الف) $\lim_{x\to ۲} ۳^{\frac{x-۲}{\sqrt{x+۱}}} =$

ب) $\lim_{x\to ۰^+} ۲^{\frac{۱}{x}} =$

۳۳- اگر $f(x)=\begin{cases} x^۲+۳x & x\ge ۱\\ ax+۲ & x<۱\end{cases}$ ، a را طوری محاسبه کنید که رابطه‌ی زیر برقرار باشد.

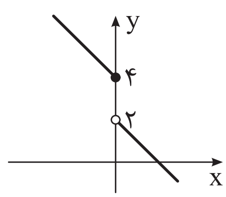
$$\lim_{x\to ۱^+} f(x)-۲\lim_{x\to ۱^-} f(x)=۴$$

※ ۳۴- در تابع $f(x)=\begin{cases} -۳ & x\in \mathbb{Z}\\ ۳ & x\in \mathbb{R}-\mathbb{Z}\end{cases}$ ، حاصل $\lim_{x\to ۰^+} f(x)+\lim_{x\to (\frac{۱}{۴})^-} f(x)$ چه‌قدر است؟

۳۵- مقدار $\lim_{x\to \pi^+}\frac{\sin x+۱}{۱+\cos x}$ را به دست آورید.

※ ۳۶- اگر تابع f در نقطه‌ی $x=۰$ حد داشته باشد و $\lim_{x\to ۰}\frac{f(x)+۱}{۳f(x)-۲}=۲$ ، آن‌گاه $\lim_{x\to ۰} f(x)$ برابر چه عددی است؟

۳۷- اگر نمودار تابع $y=f(x)$ شکل روبه‌رو باشد، حاصل $\lim_{x\to \sqrt{۳}^-}(f(x^۲-۳)+f(۳-x^۲))$ را به دست آورید.



۳۸- دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ در همسایگی $x=a$ به گونه‌ای تعریف شده‌اند که f در $x=a$ دارای حد است اما g در $x=a$ حد ندارد. در توابع زیر وجود یا عدم وجود حد را در $x=a$ بررسی کنید.

الف) $h(x)=f(x)\pm g(x)$

ب) $s(x)=f(x)g(x)$

پ) $t(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$

ت) $\theta(x)=\frac{g(x)}{f(x)}$

۳۹- دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ در همسایگی $x=a$ به گونه‌ای تعریف شده‌اند که f در $x=a$ دارای حد است، اما g در $x=a$ حد ندارد. وجود یا عدم وجود حد دو تابع $(fog)(x)$ و $(gof)(x)$ را بررسی کنید.

※ ۴۰- فرض می‌کنیم دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ در یک همسایگی $x=a$ تعریف شده‌اند و در $x=a$ هیچ‌کدام حد ندارند؛ نشان دهید هر یک از توابع زیر در $x=a$ ممکن است دارای حد باشد.

الف) $f\pm g$ ب) $f\times g$ پ) $\frac{f}{g}$ ت) $\frac{g}{f}$

۴۱- در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x} & x>0\\ -\sqrt{1-x} & x<0\end{cases}$، حاصل $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x^3-x)$ را به دست آورید.

(سراسری – ۸۹)

۴۲- دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ را طوری تعریف کنید که شامل همه‌ی ویژگی‌های زیر باشند:

الف) هر دو در همسایگی $x=1$ تعریف شده باشند.

ب) f در $x=1$ دارای حد و g فاقد حد باشد.

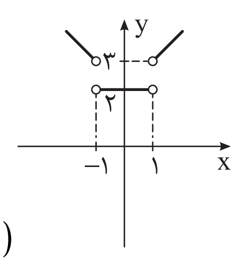
پ) $f\times g$ در $x=1$ حد داشته باشد.

※ ۴۳- دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ را در نظر می‌گیریم: $f(x)=\begin{cases}-x & x<0\\ 1 & x\geq 0\end{cases}$ و $g(x)=\begin{cases}1 & x<0\\ x & x\geq 0\end{cases}$ وجود حد توابع f ، g ، $f\times g$ و fog را در $x=0$ بررسی کنید.

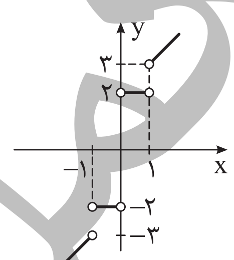
※ ۴۴- دو تابع $f(x)=\sqrt{x-1}$ و $g(x)=\sqrt{1-x}$ را در نظر می‌گیریم؛ آیا $\lim\limits_{x\to 1}(f+g)(x)$ وجود دارد؟ آیا $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{x-1}+\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{1-x}$ وجود دارد؟ چرا قضیه حد مجموع در این شرایط برقرار نیست؟

۴۵- فرض کنید $f(x)=\begin{cases}x^2+1 & x\geq 1\\ x^2-1 & x<1\end{cases}$ و $g(x)=\begin{cases}-x^2+1 & x\geq 1\\ x^2+1 & x<1\end{cases}$؛ نشان دهید دو تابع f و g در $x=1$ حد ندارد. در صورتی که $f+g$ در $x=1$ دارای حد می‌باشد. آیا این مثال با قضیه حد مجموع دو تابع در تناقض قرار نمی‌گیرد؟

۴۶- در شکل‌های زیر تابع زوج و تابع فرد را مشخص کنید. اگر حد دو تابع در $x\to 1^+$ و $x\to 1^-$ به ترتیب برابر ۳ و ۲ باشد، حد تابع را در $x\to -1^-$ و $x\to -1^+$ پیدا کنید.



الف) $f(x)$



ب) $g(x)$

※ ۴۷- دو تابع $g(x)$ و $f(x)$ را به گونه‌ای مشخص کنید که در همسایگی $x=a$ تعریف شده باشند و در $x=a$ هیچ‌کدام دارای حد نباشند، اما دو تابع fog و gof در $x=a$:

الف) دارای حد باشند.

ب) حد نداشته باشند.

قضایای حد و حـد توابع جزء صحیح و قدر مطلق

۴۸- در صورت وجود، حد تابع $f(x)=(x+2)[x+2]$ را در $x=1$ به دست آورید.

۴۹- اگر $f(x)=[\frac{x}{2}]+[\sqrt{x}]$ ، مجموع حد راست و چپ $f(x)$ را در $x=2$ محاسبه کنید.

* ۵۰- آیا تابع $f(x)=[2x]-[-3x]$ در $x=2$ حد راست و چپ برابر دارد؟

۵۱- دو تابع با عبارت‌های شامل جزء صحیح مثال بزنید که اگر $x \to 0$ حد یکی از آن‌ها برابر صفر شود ولی حد تابع دوم قابل بررسی نباشد.

* ۵۲- مجموع حد راست و چپ تابع $f(x)=x^2[x^2-3]$ ، اگر $x \to \sqrt{3}$ چه‌قدر است؟

۵۳- در صورت وجود، حد تابع $f(x)=[\frac{[x^2]}{x}]$ را در $x=0$ به دست آورید.

۵۴- آیا $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{x+|x|}$ موجود است؟

* ۵۵- حاصل حد روبه‌رو را به دست آورید. $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{[x]-|x|}{[x]+|x|}=$

۵۶- قدر مطلق تفاضل حد چپ و راست تابع $f(x)=\frac{x^2-4x+3}{|x-1|}$ در $x=1$ را به دست آورید.

۵۷- حاصل حد روبه‌رو را به دست آورید. $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{[\sin x]}{x}+\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{|\sin x|}{\sin x}$

۵۸- حاصل حد روبه‌رو را محاسبه کنید. $\lim\limits_{x\to (-1)^+} \frac{[x]+1}{x^2-1}=$

* ۵۹- حاصل $\lim\limits_{x\to 1} [x]([x]-1)$ را به دست آورید.

۶۰- حاصل حد توابع زیر را در صورت وجود بیابید.

الف) $\lim\limits_{x\to \sqrt{3}^+} ([x^2]+[x-1])=$

* ب) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-1}{1-[x]}=$

پ) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{[x]+[-x]}=$

* ت) $\lim\limits_{x\to 1} \sqrt{x-[x]}=$

۶۱- حاصل $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}^+} [\frac{1}{x}]$ و $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}^-} [\frac{1}{x}]$ را مشخص کنید.

۶۲- مقدار حدهای زیر را به دست آورید.

الف) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}^+} [\tan x]=$

ب) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}^+} [\cot gx]=$

*۶۳- حاصل $\lim\limits_{x\to\frac{۳\pi}{۲}} [\frac{۱}{\sin x}]$ را به دست آورید.

۶۴- حاصل $\lim\limits_{x\to ۰^-} [x^۲-۲x+۲]$ را به دست آورید.

حدهای نامتناهی

۶۵- تابع $f(x)=\frac{۱}{x^۲}$ را در نظر می‌گیریم. با نزدیک شدن x به عدد صفر، مقدار $\frac{۱}{x^۲}$ چگونه تغییر می‌کند؟ آیا تابع در $x=۰$ دارای حد است؟

*۶۶- حد $f(x)=۲^{\frac{۱}{x}}$ را در $x\to ۰^+$ بررسی کنید.

*۶۷- مقادیر حد توابع زیر را بررسی کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{۲}} \tan x =$

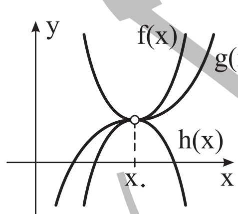
ب) $\lim\limits_{x\to ۰} \cot g x =$

۶۸- اگر تابع $f(x)=\frac{۲x+۱}{x^۲+ax+b}$ در همسایگی $x=۱$ مرتباً با مقادیر مثبت بی‌کران افزایش یابد، مقادیر a و b را مشخص کنید.

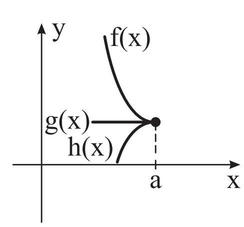
قضیه‌ی فشردگی

۶۹- با توجه به نمودار زیر حاصل حد زیر را به دست آورید.

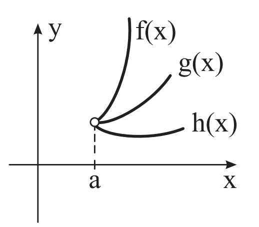
$$\lim_{x\to x_۰} (f(x)-g(x))+\lim_{x\to x_۰} (g(x)-h(x))=$$



*۷۰- آیا قضیه‌ی فشردگی برای توابع $f(x)$ ، $g(x)$ و $h(x)$ با توجه به شکل زیر برقرار است؟



الف)



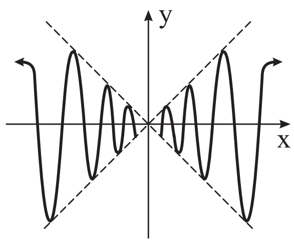
ب)

۷۱- اگر برای هر x داشته باشیم $|f(x)+۲|\le (x-۴)^۲$ ، حاصل $\lim\limits_{x\to ۴} f(x)$ را به دست آورید.

* ۷۲- اگر به ازاء هر x در بازه $(-\frac{\pi}{۲}, \frac{\pi}{۲})$ داشته باشیم: $\frac{۳}{۲} - \cos^۲ x \le f(x) \le x^۲ + \frac{۱}{۲}$

حاصل $\lim\limits_{x\to ۰} \frac{۱}{f(x)}$ را محاسبه کنید.

۷۳- نمودار تابع $f(x) = x\sin\frac{۱}{x}$ به صورت روبه‌رو است.



الف) نشان دهید حد تابع در نقاط به طول $x = \frac{۱}{k\pi}$ برابر صفر است. $(K \in \mathbb{Z})$

ب) به کمک قضیه‌ی فشردگی ثابت کنید: $\lim\limits_{x\to ۰} x\sin\frac{۱}{x} = ۰$

۷۴- به کمک قضیه‌ی فشردگی ثابت کنید: $\lim\limits_{x\to ۰} x[\frac{۱}{x}] = ۱$

* ۷۵- به کمک قضیه‌ی فشردگی ثابت کنید:

الف) $\lim\limits_{x\to ۰} x^۲\cos\frac{۱}{x} = ۱$

ب) $\lim\limits_{x\to -۱} (\frac{x+۱}{x^۲})\sin\frac{۱}{۱+x} = ۰$

* ۷۶- اگر به ازاء اعداد مثبت x داشته باشیم $۱ - \frac{۱}{x} \le f(x) \le x - ۱$ ، به کمک قضیه‌ی فشردگی ثابت کنید:

$\lim\limits_{x\to ۰^+} \frac{f(x+۱)}{x} = ۱$

رفع ابهام $\frac{۰}{۰}$ در توابع گویا

۷۷- حاصل حدهای زیر را در صورت وجود بیابید.

الف) $\lim\limits_{x\to ۳} \frac{x^۲ - ۳x}{x - ۳} =$

* ب) $\lim\limits_{x\to -۱} \frac{x^۲ + ۳x + ۲}{x + ۱} =$

* پ) $\lim\limits_{x\to -۱} \frac{x^۲ - ۱}{x^۳ + ۱} =$

ت) $\lim\limits_{x\to -۳^-} \frac{x^۲ + ۴x + ۳}{|x + ۳|} =$

۷۸- حاصل حدهای زیر را در صورت وجود بیابید.

الف) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3+x-2}{x-1}=$

ب) $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{\sqrt{x^2-2x+1}}{x^3+3x^2-4}=$

پ) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^5+1}{x^2+3x+2}=$

ت) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^5+x^4+x^3+x^2+x+1}{x^2+4x+3}=$

۷۹- حاصل حد روبه‌رو را به دست آورید. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^n-a^n}{x-a}=$

* ۸۰- اگر n و m اعداد طبیعی فرد باشند، حاصل حد روبه‌رو چه‌قدر است؟ $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^n+1}{x^m+1}=$

* ۸۱- حاصل حد $\lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{x^2[x]-27}{x[x]-9}$ را محاسبه کنید.

۸۲- حاصل حد روبه‌رو را به دست آورید. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^{10}-1-10(x-1)}{(x-1)^2}=$

۸۳- حاصل حد روبه‌رو را به دست آورید. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^{10}+x-2}{x^5+x-2}=$

۸۴- اگر $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+ax+b}{x-1}=4$ ، مقدار a و b چه‌قدر است؟

* ۸۵- اگر $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{ax^3+ax^2+x+1}{(x+1)^2}=b$ و $b\in \mathbb{R}$ ، آن‌گاه $a+b$ را محاسبه کنید.

* ۸۶- حاصل حد روبه‌رو را به دست آورید. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x+x^2+x^3+\dots+x^n-n}{x-1}=$

رفع ابهام $\frac{0}{0}$ شامل عبارت گنگ

۸۷- حاصل حدهای زیر را در صورت وجود بیابید.

الف*) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x}{\sqrt{x}}=$

ب) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}=$

پ) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sqrt{t+h}-\sqrt{t}}{h}=$

※ ت) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{\sqrt{x}-1}=$

※ ۸۸- حاصل حد روبه‌رو را به دست آورید. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}=$

۸۹- حاصل حد روبه‌رو را به دست آورید. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}=$

※ ۹۰- حاصل حد روبه‌رو را به دست آورید. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{x+6}-2}{\sqrt{x+14}-4}=$

※ ۹۱- حد عبارت $\dfrac{\sqrt[4]{x}-1}{x\sqrt{x}-1}$ ، وقتی $x\to 1$ را به دست آورید.

※ ۹۲- حاصل حد روبه‌رو را به دست آورید. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[5]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}=$

۹۳- حاصل حد روبه‌رو را به دست آورید. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[5]{1+x}-1}{x}=$

۹۴- حد کسر $\dfrac{\sqrt[3]{x-1}+x-1}{\sqrt[3]{x^2-1}}$ وقتی $x\to 1$ را به دست آورید.

※ ۹۵- حاصل $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$ برابر چه عددی است؟

※ ۹۶- حد تابع $f(x)=\dfrac{\sqrt{\sqrt{x}-1}}{\sqrt{x-\sqrt{x}}}$ را در شرایطی که $x\to 1^+$ به دست آورید.

۹۷- حد کسر $\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}$ اگر $x\to a^+$ برابر چه عددی است؟

رفع ابهام $\frac{0}{0}$ مثلثاتی

۹۸- حاصل حدهای زیر را در صورت وجود، به دست آورید.

الف) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{3x}=$

※ ب) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 4x}{\sin 3x}=$

پ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x-\sin 2x}{5x}=$

※ ت) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x\sin 3x}{5x^2}=$

۹۹- حاصل حدهای زیر را در صورت وجود، به دست آورید.

الف) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin ax - \sin bx}{ax - bx} =$

ب) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x \tan 2x \tan 3x \ldots \tan nx}{x^n} =$

پ) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\sin(x-a)}{x^2 - a^2} =$

۱۰۰- حاصل حدهای زیر را در صورت وجود، به دست آورید.

الف) ❋ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 2x}{2x^2} =$

ب) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sqrt{1-\cos x}}{x} =$

۱۰۱- حاصل حدهای زیر را در صورت وجود، به دست آورید.

الف) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos 4x - \cos 2x}{\cos 3x - \cos x} =$

ب) ❋ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos 5x - \cos x}{1-\cos^2 x} =$

❋۱۰۲- حاصل حد روبه‌رو را به دست آورید. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \ldots + \sin nx}{nx} =$

۱۰۳- مقدار $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\tan x - \tan a}{x-a}$ را به دست آورید.

❋۱۰۴- حاصل حدهای زیر را در صورت وجود، بیابید.

الف) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{4x \tan x}{\sqrt{1+x^2} - 1} =$

ب) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{\cos 4x} - \sqrt{\cos 2x}}{1-\cos 2x} =$

۱۰۵- حاصل حدهای زیر را به دست آورید.

الف) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}} \dfrac{\sin(x-\frac{\pi}{3})}{x-\frac{\pi}{3}} =$

ب) ❋ $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\tan(x-\frac{\pi}{4})}{4x-\pi} =$

۱۰۶- حاصل حدهای زیر را به دست آورید.

(الف ⁕ $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^{+}} \dfrac{|\cos x|}{x-\frac{\pi}{2}}=$

ب) $\lim\limits_{x\to 1^{+}} \dfrac{\tan \pi x}{|x-1|}=$

۱۰۷- حاصل حد رو به رو را به دست آورید. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos 2x+\left[-\sin^{2} x\right]}{\sin^{2} x+\left[\sin^{2} x\right]}=$

⁕ ۱۰۸- حاصل حد روبه‌رو چه‌قدر است؟ $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{\cos 2x}{\cos x-\sin x}=$

⁕ ۱۰۹- حاصل $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{\tan x-\cot gx}{\sin 4x}$ را به دست آورید.

⁕ ۱۱۰- حاصل کسر $\dfrac{1-|\cos x|}{|\sin x|\sin x}$ وقتی $x\to 0^{-}$ را محاسبه کنید.

⁕ ۱۱۱- اگر فرض کنیم $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a\sin bx}{\sqrt{1+x}-1}=\dfrac{1}{4}$ ، حاصل $a+b$ را محاسبه کنید.

⁕ ۱۱۲- حد کسر $\dfrac{\sin 3x}{\sqrt{1-\cos^{3} x}}$ وقتی $x\to 0$ را به دست آورید.

⁕ ۱۱۳- اگر $m , n\in\mathbb{N}$، حاصل $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{\sin mx}{\sin nx}$ را به دست آورید.

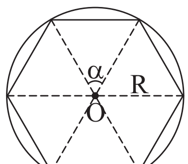
⁕ ۱۱۴- حاصل حد روبه‌رو را به دست آورید. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\sin x-\sin a}{\tan x-\tan a}=$

⁕ ۱۱۵- حاصل $=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{1-\sin x}{\sin x+\sin^{3} x}$ چه‌قدر است؟ **(سراسری – ۸۲)**

۱۱۶- حاصل حد روبه‌رو را به دست آورید. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}}{x^{2}}=$

⁕ ۱۱۷- حد کسر $\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos\sqrt{x}}$ اگر $x\to 0^{+}$ برابر چه عددی است؟

⁕ ۱۱۸- فرض کنید یک n ضلعی منتظم مانند شکل روبه‌رو در دایره‌ای به شعاع R محاط شده باشد. مساحت n ضلعی منتظم را محاسبه کنید. می‌دانیم که اگر تعداد اضلاع n ضلعی به‌طور نامحدود افزایش یابد (و یا $\alpha\to 0$) مساحت آن به مساحت دایره نزدیک می‌شود. این حدس ساده شهودی را با استفاده از فرمول مساحت چندضلعی به دست آورید.



۱۱۹- حاصل $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{۳}} \dfrac{\sin x-\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{x-\frac{\pi}{۳}}$ را به دست آورید.

* ۱۲۰- حاصل $\lim\limits_{x\to(\frac{۱}{۲})^+} \dfrac{|\cos\pi x|}{۱-\sqrt{۲x}}$ چه‌قدر است؟ (سراسری – ۸۳)

* ۱۲۱- حاصل $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{۴}} \dfrac{\sin x-\cos x}{\pi-۴x}$ را به دست آورید.

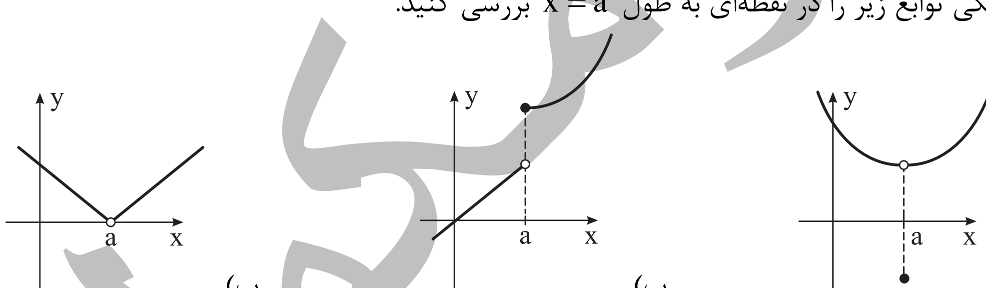
۱۲۲- حاصل حد روبه‌رو را به دست آورید. $\lim\limits_{x\to۰} \dfrac{\tan x-\sin x}{\sin^{۳} x}=$

۱۲۳- حاصل حد روبه‌رو را به دست آورید. $\lim\limits_{x\to۰} \dfrac{\tan ۳x-\tan ۲x-\tan x}{x^{۳}}=$

۱۲۴- حاصل حد روبه‌رو را به دست آورید. $\lim\limits_{x\to۱^-} \dfrac{\cos^{-۱}\sqrt{x}}{\sqrt{۱-x^{۲}}}=$

پیوستگی در نقطه

۱۲۵- پیوستگی توابع زیر را در نقطه‌ای به طول $x=a$ بررسی کنید.



الف) ب) پ)

۱۲۶- تابعی مثال بزنید که در نقطه‌ای به طول $x=۲$ حد داشته باشد، اما پیوسته نباشد.

۱۲۷- پیوستگی دو تابع $f(x)=\sqrt{x-۱}$ و $g(x)=\sqrt[۳]{x-۱}$ را در $x=۱$ بررسی کنید.

۱۲۸- پیوستگی تابع $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^{۲}-۱}{x-۱} & x\neq ۱\\ ۲ & x=۱\end{cases}$ را در $x=۱$ بررسی کنید.

* ۱۲۹- با رسم نمودار $y=x-[x]$ نقاط ناپیوستگی آن را مشخص کنید.

۱۳۰- a را طوری تعیین کنید که تابع $f(x)$ در $x=۰$ پیوسته باشد. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin ۳x}{x} & x\neq ۰\\ a & x=۰\end{cases}$

۱۳۱- پیوستگی تابع $f(x)$ را در نقاط $x=\pm۱$ بررسی کنید. با رسم نمودار $f(x)$ نیز نقاط ناپیوستگی را مشخص کنید. $f(x)=\begin{cases}\sqrt{۱-x^{۲}} & |x|\leq ۱\\ x-۱ & |x|>۱\end{cases}$

* ۱۳۲- مقدار a را چنان بیابید که تابع $f(x)$ در $x=1$ پیوسته باشد. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+3x-4}{x-1} & x\neq 1\\ a & x=1\end{cases}$

۱۳۳- مقادیر a و b را طوری بیابید که تابع $f(x)$ در $x=1$ پیوسته باشد. $f(x)=\begin{cases}[2x]+a & x<1\\ [\sqrt{2}x] & x=1\\ \dfrac{b(x^2-1)}{|1-x|} & x>1\end{cases}$

* ۱۳۴- مقادیر a و b را چنان بیابید که تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}2[x]+a & x<0\\ \sqrt{2}+b & x=0\\ \dfrac{\sin x}{\sqrt{1-\cos x}} & x>0\end{cases}$ در $x=0$ پیوسته باشد.

۱۳۵- مقدار $f(0)$ را چنان به دست آورید که تابع $f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{x+27}-3}{x}$ در نقطه‌ای به طول صفر پیوسته شود.

۱۳۶- مقدار $f(0)$ را چنان تعیین کنید که تابع $f(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x} & x\neq 0\\ a & x=0\end{cases}$ در $x=0$ پیوسته شود.

۱۳۷- مقدار m را طوری محاسبه کنید که تابع $f(x)=\dfrac{1}{x^2+mx+1}$ روی دامنه‌اش پیوسته شود.

۱۳۸- پیوستگی تابع $f(x)=\sqrt{x^5-x^4}$ را در $x=0$ بررسی کنید.

* ۱۳۹- پیوستگی $f(x)=\sqrt{1-x-\sqrt{1-x}}$ را در $x=1$ بررسی کنید.

* ۱۴۰- تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}1 & x\in\mathbb{Q}\\ 0 & x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}\end{cases}$ در چند نقطه پیوسته است؟

قضایای پیوستگی

۱۴۱- جدول زیر را برای $x=a$ کامل کنید.

ویژگی \ تابع	$f+g$	$f-g$	$f\times g$	$\dfrac{f}{g}$
f و g پیوسته		پیوسته		
f و g ناپیوسته	نامشخص			
f پیوسته و g ناپیوسته			نامشخص	

۱۴۲- دو تابع مثال بزنید که هر دو در $x=0$ ناپیوسته باشند ولی مجموع آن‌ها در $x=0$ پیوسته شود.

۱۴۳- دو تابع مثال بزنید که یکی در $x=1$ پیوسته و دیگری ناپیوسته ولی ضرب آن‌ها در $x=1$ پیوسته باشد.

۱۴۴- تابعی مانند $f(x)$ مثال بزنید که در $x=0$ پیوسته نباشد ولی $|f(x)|$ در $x=0$ پیوسته باشد.

۱۴۵- توابع f و g در $x=a$ به ترتیب پیوسته و ناپیوسته‌اند؛ با ارائه مثال نشان دهید fog و gof در $x=a$ ممکن است پیوسته باشند.

* ۱۴۶- نقاط ناپیوستگی تابع روبه‌رو را مشخص کنید.
$$f(x)=\begin{cases}1-x^2 & x\le -1\\ x^2-1 & -1<x\le 2\\ \dfrac{1}{x-3} & x>2\end{cases}$$

۱۴۷- شرایطی را مشخص کنید که مطابق آن برابری $f(\lim\limits_{x\to a} g(x))=\lim\limits_{x\to a} f(g(x))$ برقرار باشد.

۱۴۸- اگر $f(x)=\begin{cases}-x^3 & x<0\\ 1 & x\ge 0\end{cases}$ و $g(x)=\begin{cases}1 & x<0\\ x^3 & x\ge 0\end{cases}$ ، نشان دهید f و g در $x=0$ ناپیوسته‌اند. آیا $f\times g$ و fog در $x=0$ پیوسته‌اند؟

۱۴۹- ثابت کنید اگر $f(x)$ در $x=a$ پیوسته و $g(x)$ در $x=a$ ناپیوسته باشد، آن‌گاه $f(x)+g(x)$ در $x=a$ ناپیوسته است.

* ۱۵۰- ثابت کنید اگر $f(x)$ و $g(x)$ در $x=a$ پیوسته باشند، آن‌گاه $f(x)+g(x)$ و $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ نیز در $x=a$ پیوسته است. $(g(a)\neq 0)$

۱۵۱- پیوستگی تابع $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$ و $f(f(x))$ را در $x=3$ بررسی کنید؛ آیا fof پیوسته است؟

۱۵۲- الف) اگر f تابعی فرد و $f(0)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ ، آن‌گاه $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=f(0)$.

ب) اگر f تابعی زوج و $f(0)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ ، نشان دهید $f(0)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$.

پیوستگی تابع جزء صحیح

۱۵۳- نشان دهید $f(x)=[x]$ در $x=0$ ناپیوسته ولی $g(x)=[x^2]$ در $x=0$ پیوسته است.

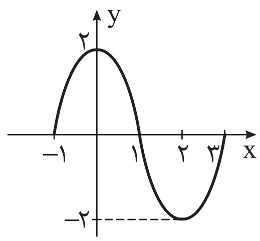
* ۱۵۴- ثابت کنید $f(x)=x[x]$ در $x=0$ ، و $g(x)=(x-1)[x]$ در $x=1$ پیوسته است.

۱۵۵- پیوستگی تابع $y=[\sin x]$ را در نقاط به طول‌های $x\in\left[\dfrac{\pi}{2},2\pi\right]$ ، $x=\dfrac{\pi}{2}$ و $x=\dfrac{3\pi}{2}$ بررسی کنید؛ نتایج به دست‌آمده را با نمودار تابع $[\sin x]$ مطابقت دهید.

۱۵۶- تابع $f(x)=\sqrt{x}-[\sqrt{x}]$ در نقاط به طول‌های $x=3$ و $x=9$ از لحاظ پیوستگی چگونه است؟

* ۱۵۷- پیوستگی تابع $f(x)=[x]\sin\pi x$ را در نقاط به طول‌های $x=\frac{۱}{۳}$ و $x=۱$ بررسی کنید.

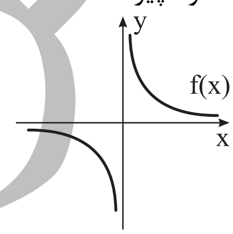
* ۱۵۸- اگر نمودار $f(x)$ به صورت روبه‌رو باشد، آن‌گاه $[f(x)]$ در چند نقطه ناپیوسته است؟



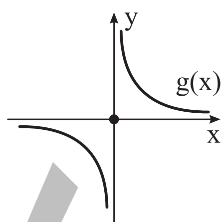
* ۱۵۹- اگر $f(x)=(x^{۲}+ax+b)[x]$ در $x=۲$ پیوسته باشد، مقادیر a و b را به دست آورید.

پیوستگی در دامنه ، پیوستگی در بازه

۱۶۰- نمودار دو تابع $f(x)=\frac{۱}{x}$ و $g(x)=\begin{cases}\frac{۱}{x} & x\neq ۰\\ ۰ & x=۰\end{cases}$ به صورت زیر رسم شده‌اند؛ کدام تابع در دامنه تعریف خود پیوسته است؟



الف)



ب)

۱۶۱- کدام‌یک از توابع زیر در دامنه تعریف خود پیوسته‌اند؟

الف) $f(x)=\sqrt{۱-x^{۲}}$

ب) $g(x)=\frac{\sqrt{(x-۳)}}{x}$

پ) $h(x)=[x]$

۱۶۲- آیا تابع $f(x)=x^{۲}[x]$ در بازه‌ی $[۱\,,\,۲)$ پیوسته است؟ چرا؟

۱۶۳- بازه پیوستگی تابع $f(x)=\sqrt{\frac{۱-x}{x-۲}}$ را مشخص کنید.

۱۶۴- تابع $f(x)=[\frac{x}{۲}]+[\frac{x}{۳}]$ در بازه‌ی $(۰\,,\,۶)$ در چند نقطه ناپیوسته است؟

* ۱۶۵- تابع f به صورت $f(x)=\begin{cases}\frac{x^{۲}+۲x-۱}{x} & |x|>۱\\ ax+b & |x|\leq ۱\end{cases}$ روی $\mathbb{R}$ پیوسته است. حاصل $a+b$ را به دست آورید.

۱۶۶- حدود m را طوری محاسبه کنید که تابع $f(x)=\frac{۱}{\sqrt{x^{۲}+mx+۳}}$ روی $\mathbb{R}$ پیوسته باشد.

۱۶۷- تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=(x-۲)[x]$ در بازه‌ی $[۰ , ۳]$ در چند نقطه ناپیوسته است؟

۱۶۸- تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=[\frac{x-۱}{۳}]$ در بازه‌ی $(۰ , ۳)$ در چند نقطه ناپیوسته است؟

* ۱۶۹- اگر $f(x)=\begin{cases} x^{۲} & x\in \mathbb{Z} \\ x & x\notin \mathbb{Z} \end{cases}$ ، $f(x)$ در دامنه تعریف خود در چند نقطه پیوسته است؟

* ۱۷۰- اگر $f(x)=\begin{cases} ax+b & |x|\ge ۱ \\ x[x] & |x|<۱ \end{cases}$ روی $\mathbb{R}$ پیوسته باشد، نمودار این تابع خط $x=۳$ را با کدام عرض قطع می‌کند؟ (سراسری-۹۰)

۱) -۲ ۲) -۱ ۳) ۱ ۴) ۲

* ۱۷۱- حد عبارت $\frac{|x^{۲}-x-۲|}{۲x-\sqrt{x^{۲}+۱۲}}$ وقتی $x\to ۲^{-}$ کدام است؟ (سراسری-۹۰)

۱) -۳ ۲) -۲ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ فصل چهارم

حد و پیوستگی توابع

۱- با نزدیک شدن مقادیر x به سمت ۱، حد تابع $f(x)=x+۱$ برابر ۲ محاسبه می‌شود. در تابع $f(x)=\dfrac{x^۲-۱}{x-۱}$ چون $x\to ۱$، $x\neq ۱$ است و می‌بینیم که حد تابع برابر ۲ به دست می‌آید.

x	۰/۹	۰/۹۹	۰/۹۹۹	۱	۱/۰۰۱	۱/۰۱	۱/۱
$f(x)$	۱/۹	۱/۹۹	۱/۹۹۹	۲	۲/۰۰۱	۲/۰۱	۲/۱

تذکر

برای این‌که تابع f در نقطه‌ای مانند $x=a$ دارای حد باشد، لازم نیست که حتماً در خود نقطه‌ی a تعریف شود.

تعریف

فرض کنید تابع f در همسایگی نقطه‌ای مانند $x=a$ تعریف شده باشد؛ در این صورت تابع f در $x=a$ حد دارد اگر و تنها اگر حد چپ و راست آن در $x=a$ موجود و مساوی باشند.

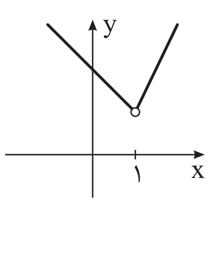
تعریف

فرض کنید تابع $f(x)$ در همسایگی راست نقطه‌ای مانند $x=a$ تعریف شده باشد و $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ موجود باشد، در این صورت: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$

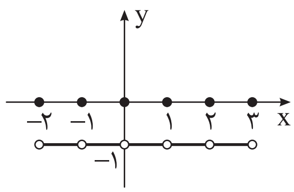
تذکر

با فرض $x\to a$، هرگاه قدرمطلق مقادیر $f(x)$ بی کران افزایش یابد، تابع f در $x=a$ دارای حد نخواهد بود.

۲- با رسم نمودار به سادگی مشخص می‌شود که حد راست و چپ تابع $f(x)$ در $x=۱$ برابر است.



۳-



$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^-} f(x) = -1$$
$$\lim_{x\to 2} f(x) = 1$$

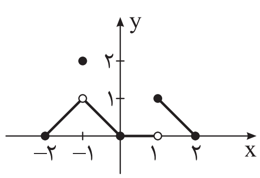
۴-

الف) $\lim_{x\to 1^+} f(x) = 2$ ب) $\lim_{x\to -1^-} f(x) = -2$ پ) $f(\frac{1}{2}) = 1$

ت) با توجه به نمودار تابع $\lim_{x\to 0} f(x)$ وجود ندارد. زیرا: $\lim_{x\to 0^+} f(x) \neq \lim_{x\to 0^-} f(x)$

۵- $\lim_{x\to 0} f(x) = -1$ ، $\lim_{x\to 1^+} f(x)$ وجود ندارد.

۶-



۷-

الف) $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \sqrt{x} = 0$ ب) $\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0^-} \sqrt{-x} = 0$

پ) حد تابع $h(x)$ در $x = 0$ قابل بررسی نیست، زیرا دامنه‌ی تابع $h(x)$ مجموعه $\{0\}$ است و در هیچ همسایگی آن تابع تعریف نشده است.

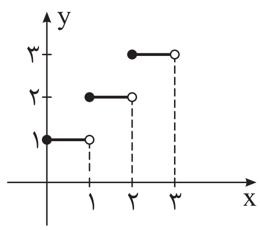
تذکر

اگر تابع در هیچ همسایگی نقطه‌ی $x = a$ تعریف نشده باشد، حد تابع در آن نقطه قابل بررسی نیست، و یا به اصطلاح بی‌معنی است.

۸- الف) طبق دامنه‌ی تابع $f(x)$ در همسایگی راست $x = 1$ تعریف نشده است، از این‌رو:

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = \frac{0}{-1} = 0$$

۹- موارد (الف) و (ب) غلط است ولی با توجه به تعریف حد، (پ) درست است. به عنوان مثال حد $f(x) = \sqrt{x}$ در $x = 0$.



۱۰- علاوه بر محاسبه‌ی مستقیم ، یک روش مهم برای محاسبه‌ی حد توابع جزء صحیح، رسم نمودار آن در یک همسایگی از نقطه‌ی داده شده می‌باشد.

$$\lim_{x\to ۲^+} f(x)=۳ \quad \text{و} \quad \lim_{x\to ۲^-} f(x)=۲$$

پس تابع در $x=۲$ حد ندارد.

۱۱-

$$AB^۲ = OA^۲ + OB^۲ \Rightarrow AB^۲ = ۱ + OB^۲$$
$$OB \to ۲\sqrt{۲} \Rightarrow AB \to ۳ \quad \text{و} \quad OB \to ۰ \Rightarrow AB \to ۱$$

۱۲-

$$\lim_{x\to ۰^+} f(x)=۱ \xrightarrow{f(۰^+)=۱^-} \lim_{x\to ۰^+} f(f(x)) = \lim_{x\to ۱^-} f(x) = -۱$$

می‌توان با نوشتن ضابطه‌ی $f(x)$ و ساختن ضابطه‌ی $fof(x)$ حد آن را تعیین نمود.

۱۳- $D_f = \mathbb{R}-\{۰\}$، با نزدیک شدن مقادیر x به صفر، $f(x)$ به عدد معینی میل نمی‌کند و بین اعداد ۱ و ۱- نوسان می‌کند. اگر $x=\frac{۱}{n}$ فرض شود ($n\in\mathbb{N}$) ، آن‌گاه $\lim_{x\to ۰} f(x)=۰$ ، یعنی با توجه به $x=۱, \frac{۱}{۱۰}, \frac{۱}{۱۰۰}, \frac{۱}{۱۰۰۰}, \dots$ ، $f(x)$ به صفر میل می‌کند؛ و اگر $x=\frac{۲}{۵}, \frac{۲}{۹}, \frac{۲}{۱۳}$ ، $f(x)$ به ۱ نزدیک می‌شود. $\sin\frac{\pi}{x}=۱ \Rightarrow \frac{\pi}{x}=۲K\pi+\frac{\pi}{۲} \Rightarrow x=\frac{۲}{۴K+۱}$ ، از این رو می‌گوییم اگر $x\to ۰$ آن‌گاه به عدد معینی نزدیک نمی‌شود و تابع $f(x)$ دارای حد نخواهد بود.

۱۴- بازه‌ی (۲ , ۰) یک همسایگی عدد ۱ است.

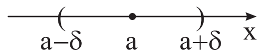
تعریف

هر بازه باز شامل عدد a ، یک همسایگی عدد a نام دارد.

۱۵- بازه‌ی $(۰ , ۶)$ یک همسایگی متقارن عدد ۳ است؛ زیرا عدد ۳ متعلق به این بازه و در مرکز آن قرار دارد.

تعریف

هر همسایگی متقارن $x = a$ را می‌توان به صورت $(a-\delta , a+\delta)$ نشان داد که در آن δ عددی مثبت است.



هر بازه به شکل $(a , a+\delta)$ یک همسایگی راست $x = a$ است.

هر بازه به شکل $(a-\delta , a)$ یک همسایگی چپ $x = a$ است.

تعریف

اگر x نقطه‌ای متعلق به یک همسایگی متقارن به مرکز a و شعاع همسایگی δ باشد، آن‌گاه:

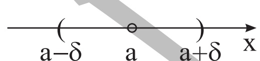
x **متعلق به همسایگی به مرکز** a **و شعاع** δ $\Leftrightarrow a-\delta < x < a+\delta \Leftrightarrow -\delta < x-a < \delta$

$$\Leftrightarrow \{x \mid |x-a| < \delta\}$$

-۱۷

تعریف

مجموعه‌ی $(a-\delta , a+\delta)-\{a\}$ را یک همسایگی متقارن محذوف نقطه‌ی a به شعاع δ می‌نامیم.



در حالت (الف) نقطه‌ی ۱ از بازه حذف نشده است.

در حالت (ب) خواهیم داشت:

$$\frac{۱}{|x-۱|} > \frac{۱}{۲} \Rightarrow |x-۱| < ۲ \Rightarrow -۲ < x-۱ < ۲ \Rightarrow -۱ < x < ۳ \qquad (x \neq ۱)$$

که نقطه‌ای به مرکز ۱ و شعاع ۲ می‌باشد. بدیهی است که $x = ۱$ در این بازه قرار ندارد.

(پ) $(|x-۱|-۱)(|x|+۱) < ۰ \xrightarrow{|x|+۱>۰} (|x-۱|-۱) < ۰ \Rightarrow |x-۱| < ۱ \Rightarrow ۰ < x < ۲$

که بازه‌ای به مرکز ۱ و شعاع همسایگی ۱ است. (بدیهی است که مرکز همسایگی در بازه داده شده قرار دارد.)

۱۹- دامنه‌ی تابع $h(x)=\sqrt{\dfrac{x-۱}{۲-x}}$ به صورت بازه مورد نظر است. $D_f=[۱\,,\,۲)$

-۲۰

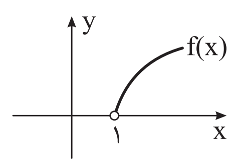
$$a-\frac{a+b}{۲}<x-\frac{a+b}{۲}<b-\frac{a+b}{۲}\Rightarrow |x-\frac{a+b}{۲}|<\frac{b-a}{۲}$$

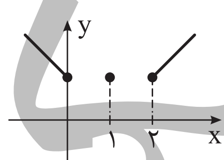
تذکر

هر بازه باز را می‌توان به صورت یک همسایگی متقارن در نظر گرفت؛ اگر $\alpha<x<\beta$، آن‌گاه این نابرابری به صورت همسایگی متقارن $|x-\dfrac{\alpha+\beta}{۲}|<\dfrac{\beta-\alpha}{۲}$ خواهد بود.

۲۲- همسایگی محذوف متقارن در $x=۳$ مطرح شده است، یعنی مرکز همسایگی محذوف نقطه‌ای به طول ۳ می‌باشد، پس: $\dfrac{a+۵+۳a-۷}{۲}=۳\Rightarrow a=۲$

-۲۳

الف) 

ب) 

۲۵- همسایگی محذوف متقارن نقطه‌ی $x=a$ اجتماع دو همسایگی راست و چپ نقطه‌ی a است، پس:

$a=b\Rightarrow(\circ\,,\,a)\cup(a\,,\,a+۳)\Rightarrow r=۳\Rightarrow a=۳$

از طرفی چون $A\cup B=B\cup A$ ، از $(a\,,\,a+۳)\cup(a-b\,,\,b)$ خواهیم داشت:

$a+۳=a-b\Rightarrow b=-۳\Rightarrow r=۳\Rightarrow a=-۹$

تذکر

اگر $(a\,,\,b)\cup(c\,,\,d)$ بیان‌گر همسایگی محذوف متقارن نقطه‌ی x باشد، آن‌گاه $b=c$ و $b-a=d-c$؛ در این‌صورت با توجه به جابه‌جایی مجموعه‌ها یعنی $(c\,,\,d)\cup(a\,,\,b)$، تساوی $a=d$ نیز برقرار است.

-۲۶

$$f(x)=\sqrt{x^3-x^2}=\sqrt{x^2(x-1)}=|x|\sqrt{x-1}\Rightarrow D_f=[1,+\infty)\cup\{0\}$$

بنابراین تابع f در $x=0$ تعریف شده ولی در هیچ همسایگی آن تعریف نشده است؛ هم‌چنین f در $x=1$ در همسایگی راست آن تعریف شده است و با نمودار مطابق است.

۲۹- الف) ۲ ب) ۲− پ) صفر د) وجود ندارد.

۳۰- الف) حاصل حد برابر صفر است.

قضیه

اگر دو تابع f و g در $x=a$ به ترتیب دارای حد L و M باشند، آن‌گاه:

۱) $\lim\limits_{x\to a}(f\pm g)(x)=\lim\limits_{x\to a}f(x)\pm\lim\limits_{x\to a}g(x)=L\pm M$

۲) $\lim\limits_{x\to a}(f\underset{\div}{\times}g)(x)=\lim\limits_{x\to a}f(x)\underset{\div}{\times}\lim\limits_{x\to a}g(x)=L\underset{\div}{\times}M$

۳۱- الف) حاصل حد برابر صفر است.

قضیه

اگر $\lim\limits_{x\to a}f(x)=L$ **، آن‌گاه** $\lim\limits_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{L}$ **(اگر n زوج باشد باید شرایط $L\geq 0$ برقرار باشد.)**

۳۲- الف) ۱

ب) حد وجود ندارد زیرا هرگاه $x\to 0^+$ آن‌گاه مقادیر تابع $f(x)=2^{\frac{1}{x}}$ بی‌کران افزایش می‌یابد.

-۳۳

$$\lim_{x\to 1^+}f(x)=(1)^2+3(1)=4$$

$$\lim_{x\to 1^-}f(x)=a(1)+2=a+2\Rightarrow 4-2(a+2)=4\Rightarrow a=-2$$

۳۵- هرگاه x با مقادیر بیشتر از π به آن نزدیک می شود، آن گاه مقادیر تابع بی‌کران افزایش می‌یابد پس حد تابع وجود ندارد.

-۳۷

$$x-\sqrt{3}=0\to x=\sqrt{3}\to x^2=3\to x^2-3=t$$

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to\sqrt{3}^+}(f(x^2-3)+f(3-x^2))=\lim\limits_{t\to 0^+}f(t)+\lim\limits_{t\to 0^+}f(-t)=2+4=6\\[2ex]\lim\limits_{x\to\sqrt{3}^-}(f(x^2-3)+f(3-x^2))=\lim\limits_{t\to 0^+}f(-t)+\lim\limits_{t\to 0^+}f(t)=4+2=6\end{cases}$$

از این رو حاصل حد مطرح‌شده برابر ۶ خواهد بود.

۳۸- $h(x)$ دارای حد نیست. حد تابع $s(x)$ و $t(x)$ نامشخص است. حد تابع $\theta(x)$ وجود ندارد. برای بررسی $s(x)$ می‌توان یک بار $f(x)=|x-1|$ و $g(x)=[x]$ و بار دیگر $f(x)$ را ۱ و $g(x)=[x]$ فرض کرد که در $x=1$ مطرح می‌شوند. برای تابع $h(x)$ فرض کنید $f(x)=x^2$ و $g(x)=[x]$ که در $x=1$ اولی دارای حد و دومی فاقد آن است و در نهایت $h(x)$ نیز در $x=1$ حد ندارد. ارائه مثال برای تابع $t(x)$ ساده خواهد بود.

قضیه

اگر f و g در همسایگی $x=a$ تعریف شده باشند و f در $x=a$ دارای حد L و g فاقد حد باشد، آن‌گاه $f \pm g$ در $x=a$ فاقد حد است.

برهان

اگر $h(x)$ در $x=a$ حدی معادل M داشته باشد، آن‌گاه:

$$\lim_{x\to a}(f(x)+g(x))=M \Rightarrow \lim_{x\to a} f(x)+\lim_{x\to a} g(x)=M \Rightarrow \lim_{x\to a} g(x)=M-L$$

که مخالف فرض است.

تذکر

اگر f و g در همسایگی a تعریف شوند و f دارای حد L و g فاقد حد باشد، آن‌گاه $\lim\limits_{x\to a}(f\times g)$ و $\lim\limits_{x\to a}(\frac{f}{g})$ نامشخص‌اند.

تذکر

اگر f و g در همسایگی $x=a$ تعریف شوند و f دارای حد L و g فاقد حد باشد، آن‌گاه تابع $\frac{g}{f}$ در $x=a$ فاقد حد است.

برهان

اگر فرض کنیم تابع $h(x)=\frac{g(x)}{f(x)}$ در $x=a$ حدی معادل L' داشته باشد، آن‌گاه مطابق قضیه‌های حدی خواهیم داشت $\lim\limits_{x\to a} h(x)\,f(x)=L'L$ و این یعنی $\lim\limits_{x\to a} g(x)=LL'$ که مخالف فرض است.

۳۹- این حدها ممکن است موجود باشند و یا ممکن است موجود نباشند.
دو تابع $f(x)=x$ و $g(x)=[x]$ را در $x=1$ در نظر می‌گیریم که اولی دارای حد و دومی فاقد آن است. آن‌گاه $fog=[x]$ در $x=1$ نیز فاقد حد است و اگر دو تابع $f(x)=1$ و $g(x)=[x]$ را در نظر بگیریم، خواهیم داشت $(fog)(x)=1$ که این تابع در هر نقطه‌ای دارای حد است.
توجه کنید که تابع gof نیز همانند مراحل بالا قابل بررسی خواهد بود.

۴۱- اگر $x \to ۰^-$ آن‌گاه عبارت $x^۳ - x$ به طرف صفر مثبت میل می‌کند $(x^۳ - x = x(x^۲ - ۱))$ از این‌رو:

$$\lim_{x\to ۰^-} f(x^۳ - x) = \lim_{t\to ۰^+} f(t) = \sqrt{۱-۰} = ۱$$

۴۲-

$$f(x) = x(x-۱) \quad \text{و} \quad g(x) = [x]$$

۴۵- حل قسمت اول مساله ساده است. قسمت دوم مساله تناقضی ایجاد نمی‌کند. می‌دانیم که اگر دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ در $x = a$ به ترتیب دارای حد L و M باشند، آن‌گاه تابع $f + g$ در $x = a$ دارای $L + M$ می‌باشند. اما عکس قضیه لزوماً برقرار نیست، یعنی اگر مجموع $f + g$ در $x = a$ دارای حد باشد لزومی ندارد که توابع f و g نیز در $x = a$ دارای حد باشند.

۴۶- تابع (الف) زوج و تابع (ب) فرد است و با توجه به ویژگی توابع زوج $(f(-x) = f(x))$ و توابع فرد $(g(-x) = -g(x))$ خواهیم داشت:

الف) $\lim_{x\to ۱^-} f(x) = \lim_{x\to -۱^+} f(x) = ۲$ و $\lim_{x\to ۱^+} f(x) = \lim_{x\to -۱^-} f(x) = ۳$

ب) $\lim_{x\to ۱^-} g(x) = \lim_{x\to -۱^+} g(x) = -۲$ و $\lim_{x\to ۱^+} g(x) = -\lim_{x\to -۱^-} g(x) = -۳$

۴۸- $(x+۲)$ و $[x+۲]$ هر دو در $x = ۱$ حد راست و حد چپ معین دارند، اما $[x+۲]$ حد راست و چپ برابر ندارد. با توجه به قضیه، از ضرب حدهای راست و چپ این دو تابع استفاده می‌کنیم.

$$\lim_{x\to ۱^+} f(x) = (۱+۲)[۱^+ + ۲] = ۹ \quad \text{و} \quad \lim_{x\to ۱^-} f(x) = (۱+۲)[۱^- + ۲] = ۶$$

تذکر

۱- برای محاسبه‌ی حد تابع $[f(x)]$ در $x = a$ ، باید $x = a + \varepsilon$ و $x = a - \varepsilon$ (که ε عدد مثبت بی‌نهایت کوچک است.) را در تابع به نحو مناسب جاگذاری نموده و عدد ثابتی را نتیجه گرفت.

فرض کنیم $\lim_{x\to a} f(x) = L$ باشد، آن‌گاه:

الف) اگر L عدد غیرصحیح باشد، آن‌گاه: $\lim_{x\to a} [f(x)] = [L]$

ب) اگر در یک همسایگی از $x = a$ داشته باشیم $f(x) > L$ و L عدد صحیح باشد، آن‌گاه:

$$\lim_{x\to a} [f(x)] = L$$

پ) اگر در یک همسایگی از $x = a$ داشته باشیم $f(x) < L$ و L عدد صحیح باشد، آن‌گاه:

$$\lim_{x\to a} [f(x)] = L - ۱$$

۲- می‌توان نمودار $f(x)$ و یا $[f(x)]$ را رسم کرد و حاصل حد را به دست آورید.

-۴۹

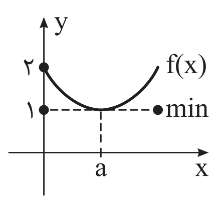
$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to ۲^+}[\frac{x}{۲}]=\lim\limits_{\varepsilon\to ۰}[\frac{۲+\varepsilon}{۲}]=۱\\ \lim\limits_{x\to ۲^-}[\frac{x}{۲}]=\lim\limits_{\varepsilon\to ۰^-}[\frac{۲+\varepsilon}{۲}]=۰\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\lim\limits_{x\to ۲^+}[\sqrt{x}]=\lim\limits_{\varepsilon\to ۰^+}[\sqrt{۲+\varepsilon}]=۱\\ \lim\limits_{x\to ۲^-}[\sqrt{x}]=\lim\limits_{\varepsilon\to ۰^-}[\sqrt{۲+\varepsilon}]=۱\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\lim\limits_{x\to ۲^+}f(x)=۱+۱=۲\\ \lim\limits_{x\to ۲^-}f(x)=۰+۱=۱\end{cases}\quad ۱+۲=۳$$

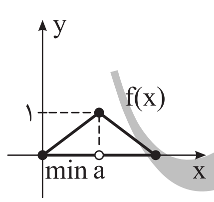
تذکر

برای محاسبه‌ی حد $[y=f(x)]$ در $x=a$ ، اگر حاصل حد برابر با عددی صحیح بود، تابع $[y=f(x)]$ در $x=۰$ فاقد حد است؛ مگر $x=a$ که طول نقطه ی ماکزیمم یا می نیمم نسبی تابع $f(x)$ باشد.

-۵۱ اگر $f(x)=\frac{[x^۲]}{x}$ ، آن‌گاه $\lim\limits_{x\to ۰}f(x)=\frac{۰}{۰\ \text{حدی}}=۰$ و اگر $g(x)=\frac{۱}{[x]}+\frac{۱}{[-x]}$، چون در این تابع $[x]$ و $[-x]$ هر دو مخالف صفر در نظر گرفته می‌شوند. دامنه‌ی تابع به صورت $\mathbb{R}-(-۱,۱)$ خواهد بود که چون همسایگی $x=۰$ در آن وجود ندارد صحبت از حد آن نیز بی‌معنی است.



-۵۳ اگر $x\to ۰$، آن‌گاه $۰<x^۲<۱$ ، پس $[x^۲]$ برابر صفر خواهد شد و چون x در $x\to ۰$ برابر صفر حدی است حاصل حد $\lim\limits_{x\to ۰}\frac{[x^۲]}{x}$ برابر صفر و در نتیجه جواب حد برابر صفر می‌شود.



تذکر

برای محاسبه‌ی حد توابع قدرمطلقی در صورت لزوم می‌توان از تعریف قدرمطلق استفاده کرد و تابع را به صورت ضابطه‌های جداگانه نوشت.

-۵۴

$$\sqrt{x+|x|}=\begin{cases}\sqrt{۲x} & x\ge ۰\\ ۰ & x<۰\end{cases}\Rightarrow\lim\limits_{x\to ۰}f(x)=۰$$

-۵۶

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to ۱^+}\dfrac{x^{۲}-۴x+۳}{|x-۱|}=\lim\limits_{x\to ۱^+}\dfrac{(x-۱)(x-۳)}{(x-۱)}=-۲\\ \lim\limits_{x\to ۱^-}\dfrac{x^{۲}-۴x+۳}{|x-۱|}=\lim\limits_{x\to ۱^-}\dfrac{(x-۱)(x-۳)}{-(x-۱)}=۲\end{array}\right\}\Rightarrow\left|\lim\limits_{x\to ۲^+}f(x)-\lim\limits_{x\to ۲^-}f(x)\right|=۴$$

-۵۷

$$\lim_{x\to ۰^+}\frac{[\sin x]}{x}+\lim_{x\to ۰^-}\frac{|\sin x|}{\sin x}=\lim_{x\to ۰^+}\frac{[\sin x]}{x}+\lim_{x\to ۰^-}\frac{-(\sin x)}{\sin x}=\frac{[۰^+]}{۰^+_{\text{حدی}}}-۱=$$

$$\frac{۰\ \text{مطلق}}{۰^+\ \text{حدی}}-۱=۰-۱=-۱$$

-۵۸

$$(x+۱=\varepsilon\to x=-۱+\varepsilon)$$

$$\lim_{x\to(-۱)^+}\frac{[x]+۱}{x^{۲}-۱}=\frac{\lim\limits_{\varepsilon\to ۰^+}[-۱+\varepsilon]+۱}{\lim\limits_{\varepsilon\to ۰^+}(-۱+\varepsilon)^{۲}-۱}=\frac{۰\ \text{مطلق}}{۰\ \text{حدی}}=۰$$

-۶۰

الف) $\lim\limits_{x\to\sqrt{۳}^+}([x^{۲}]+[x-۱])=\lim\limits_{x\to\sqrt{۳}^+}[x^{۲}]+\lim\limits_{x\to\sqrt{۳}^+}[x-۱]=۳+۰=۳$

پ) به سادگی ملاحظه می‌شود که: $\lim\limits_{x\to ۰}([x]+[-x])=-۱$ از این رو: $\lim\limits_{x\to ۰}\dfrac{\sin x}{[x]+[-x]}=۰$

-۶۱ **روش اول:**

$$x\to\frac{۱}{۲}^+\Rightarrow x>\frac{۱}{۲}\Rightarrow\frac{۱}{x}<۲\Rightarrow\lim_{x\to\frac{۱}{۲}^+}[\frac{۱}{x}]=۱$$

$$x\to\frac{۱}{۲}^-\Rightarrow x<\frac{۱}{۲}\Rightarrow\frac{۱}{x}>۲\Rightarrow\lim_{x\to\frac{۱}{۲}^-}[\frac{۱}{x}]=۲$$

روش دوم:

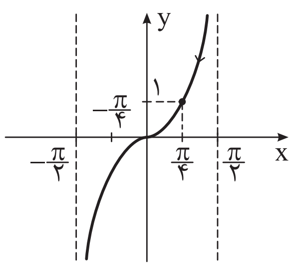
$$x\to\frac{۱}{۲}^+\Rightarrow x=\frac{۱}{۲}+\varepsilon(\varepsilon\to ۰^+)\Rightarrow\lim_{\varepsilon\to ۰^+}[\frac{۱}{\frac{۱}{۲}+\varepsilon}]=\lim_{\varepsilon\to ۰^+}[\frac{۲}{۱+۲\varepsilon}]=۱$$

$$x\to\frac{۱}{۲}^-\Rightarrow x=\frac{۱}{۲}-\varepsilon(\varepsilon\to ۰^+)\Rightarrow\lim_{\varepsilon\to ۰^+}[\frac{۱}{\frac{۱}{۲}-\varepsilon}]=\lim_{\varepsilon\to ۰^+}[\frac{۲}{۱-۲\varepsilon}]=۲$$

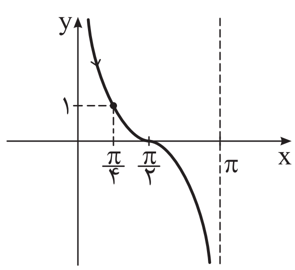
نتیجه

در عبارت های جز صحیحی حاصل $\frac{۱}{(\frac{۱}{a})^+}$ برابر a^- و حاصل $\frac{۱}{(\frac{۱}{a})^-}$ برابر a^+ می‌باشد.

۶۲- الف) با توجه به نمودار $\tan x$، مشخص می‌شود که برای xهای بزرگ‌تر از $\frac{\pi}{۴}$، تابع $\tan x$ با مقادیر بیش‌تر از ۱ به ۱ میل می‌کند. از این رو نتیجه می‌گیریم: $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{۴}^+}[\tan x]=۱$

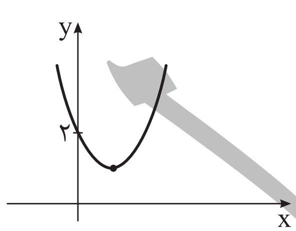


ب) با توجه به نمودار $\cot gx$، مشخص می‌شود که برای xهای بزرگ‌تر از $\frac{\pi}{۴}$، تابع $\cot gx$ با مقادیر کم‌تر از ۱ به ۱ میل می‌کند. از این رو نتیجه می‌گیریم: $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{۴}^+}[\cot gx]=\circ$



۶۴- اگر $f(x)=x^۲-۲x+۲$، آن‌گاه $f(\circ)=۲$ و مطابق شکل f، تابع f وقتی $x\to\circ^-$ با مقادیر بیش‌تر از ۲ به ۲ نزدیک می‌شود. در نتیجه:

$$x^۲-۲x+۲\to ۲^+ \Rightarrow \lim_{x\to\circ^-}[x^۲-۲x+۲]=۲$$



۶۵- اگر $x\to\circ$ ، آن‌گاه $x^۲\to\circ$ و در نتیجه $\frac{۱}{x^۲}$ بی‌کران افزایش پیدا می‌کند و به سمت عدد مشخصی میل نمی‌کند.

۶۸- با توجه به مفهوم مساله باید حد مخرج کسر با مقادیر بیش‌تر از صفر به صفر میل کند. از این رو عبارت $x^۲+ax+b$ باید به صورت مربع کامل باشد و چون $x\to۱$ خواهیم داشت:

$$x^۲+ax+b=(x-۱)^۲ \Rightarrow a=-۲ \text{ و } b=۱$$

۶۹- مطابق قضیه‌ی فشردگی مقدار حد خواسته‌شده برابر صفر است.

قضیه

اگر f و g و h در همسایگی محذوف $x=a$ تعریف شده باشند و اگر نامساوی $f(x)\le g(x)\le h(x)$ و تساوی $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} h(x)=L$ برقرار باشد، آن‌گاه: $\lim\limits_{x\to a} g(x)=L$.

تذکر

۱- از قضیه‌ی فشردگی می‌توان برای حدود یک‌طرفه نیز استفاده کرد.

۲- نامساوی مربوط به قضیه‌ی فشردگی می‌تواند یک نامساوی اکید باشد. $f(x)<g(x)<h(x)$

۳- نامساوی مربوط به قضیه‌ی فشردگی کافی است که فقط در همسایگی نقطه‌ی $x=a$ برقرار باشد و لزوماً تمامی دامنه‌ی تابع را دربر نگیرد.

۷۱-

$$|f(x)+2|\le (x-4)^2 \Rightarrow -(x-4)^2\le f(x)+2\le (x-4)^2$$

$$\lim_{x\to 4}(x-4)^2=\lim_{x\to 4}-(x-4)^2=0 \xrightarrow{\text{قضیه‌ی فشردگی}} \lim_{x\to 4}(f(x)+2)=0 \Rightarrow \lim_{x\to 4} f(x)=-2$$

۷۳- الف) در نقاط به طول $x=\frac{1}{\pi}$ یا $x=\frac{1}{2\pi}$ و یا ... $x=\frac{1}{K\pi}$، حد تابع $h(x)=\sin\frac{1}{x}$ برابر صفر است. هم‌چنین تابع $g(x)=x$ در این نقاط به طول‌های $x=\frac{1}{K\pi}$ حدی معادل $\frac{1}{K\pi}$ دارد. از این رو مطابق قضیه‌ی ضرب حدها خواهیم داشت:

$$\lim_{x\to \frac{1}{K\pi}} x\sin\frac{1}{x}=\frac{1}{K\pi}\times 0=0$$

ب)

اثبات با کمک قضیه‌ی فشردگی

می‌دانیم که $-1\le \sin\frac{1}{x}\le 1$، از این رو:

الف) $x>0$، در این صورت اگر طرفین نابرابری را در x ضرب کنیم:

$$-x\le x\sin\frac{1}{x}\le x \Rightarrow \lim_{x\to 0^+} x=\lim_{x\to 0^+}(-x)=0 \xrightarrow{\text{قضیه‌ی فشردگی}} \lim_{x\to 0^+} x\sin\frac{1}{x}=0$$

ب) $x<0$، در این صورت:

$$-x\ge x\sin\frac{1}{x}\ge x \Rightarrow \lim_{x\to 0^-} x=\lim_{x\to 0^-}(-x)=0 \xrightarrow{\text{قضیه‌ی فشردگی}} \lim_{x\to 0^-} x\sin\frac{1}{x}=0$$

۷۴- از نابرابری مهم $x-1<[x]\le x$ نتیجه می‌گیریم $u-1<[u]\le u$.

بنابراین:

$$\frac{1}{x}-1<[\frac{1}{x}]\le\frac{1}{x}$$

حال اگر $x>0$ ، خواهیم داشت:

$$x\left((\frac{1}{x})-1\right)<x[\frac{1}{x}]\le x(\frac{1}{x})$$

$$1-x<x[\frac{1}{x}]\le 1\Rightarrow \lim_{x\to 0}(1-x)=\lim_{x\to 0}1=1\Rightarrow \lim_{x\to 0}x[\frac{1}{x}]=1$$

در حالت $x<0$ نیز به همین نحو به اثبات می‌رسیم.

۷۷-

الف) $$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-3x}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{x(x-3)}{x-3}\to\lim_{x\to 3}x=3$$

ت) $$\lim_{x\to -3^-}\frac{x^2+4x+3}{|x+3|}=\lim_{x\to -3^-}\frac{(x+1)(x+3)}{-(x+3)}=2$$

تذکر

اگر $h(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$ یک تابع گویا باشد و اگر $\lim_{x\to a}h(x)=\frac{0}{0}$ (که در این مقادیر صفرهای صورت و مخرج مقادیر حدی و نزدیک به صفراند) می‌گوییم که با حالت مبهم $\frac{0}{0}$ روبه‌رو هستیم و برای رفع ابهام باید با کمک اتحادها و روش‌های تجزیه، در f و g عامل $x-a$ را ایجاد کنیم؛ چون هر دو تابع f و g بر آن بخش‌پذیرند.

در حالت $\frac{0}{0}$ اگر مقدار صورت کسر برابر صفر مطلق و مقدار مخرج کسر برابر صفر حدی شد، حاصل حد برابر صفر است و اگر تحت هر شرایطی مقدار مخرج کسر برابر صفر مطلق شد، آن‌گاه مقدار حد قابل بررسی نخواهد بود.

حالت حدی کسر $\frac{f(x)}{g(x)}$ را $\frac{0}{0}$ مبهم می‌گوییم؛ زیرا مقدار این حد در شرایط مختلف متفاوت است و حتی تحت شرایطی ممکن است که $h(x)$ دارای حد نباشد.

۷۸- الف) با عمل تقسیم x^3+x-2 بر $x-1$ خواهیم داشت:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3+x-2}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x+2)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x^2+x+2)=4$$

ب) $$\lim_{x\to 1^-}\frac{\sqrt{x^2-2x+1}}{x^3+3x^2-4}=\lim_{x\to 1^-}\frac{|x-1|}{(x-1)(x^2+4x+4)}=$$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{-(x-1)}{(x-1)(x^2+4x+4)}=\lim_{x\to 1^-}\frac{-1}{x^2+4x+4}=\frac{-1}{9}$$

یادآوری

پ) $\lim\limits_{x\to -۱} \dfrac{x^۵+۱}{x^۲+۳x+۲}$ ، $x^۵+۱=(x+۱)(x^۴-x^۳+x^۲-x+۱) \Rightarrow \lim\limits_{x\to -۱} \dfrac{x^۵+۱}{x^۲+۳x+۲}$

$$= \lim_{x\to -۱} \frac{(x+۱)(x^۴-x^۳+x^۲-x+۱)}{(x+۱)(x+۲)} = ۵$$

ت) $\lim\limits_{x\to -۱} \dfrac{x^۵+x^۴+x^۳+x^۲+x+۱}{x^۲+۴x+۳} = \lim\limits_{x\to -۱} \dfrac{x^۴(x+۱)+x^۲(x+۱)+(x+۱)}{(x+۱)(x+۳)}$

$$= \lim_{x\to -۱} \frac{(x+۱)(x^۴+x^۲+۱)}{(x+۱)(x+۳)} = \lim_{x\to -۱} \frac{x^۴+x^۲+۱}{x+۳} = \frac{۳}{۲}$$

-۷۹

$$\lim_{x\to a} \frac{x^n-a^n}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{(x-a)(x^{n-۱}+x^{n-۲}a+x^{n-۳}a^۲+\dots+xa^{n-۲}+a^{n-۱})}{x-a} = na^{n-۱}$$

-۸۲ می‌دانیم که $x^{۱۰}-۱=(x-۱)(x^۹+x^۸+x^۷+\dots+x+۱)$، از این رو می‌نویسیم:

$$\lim_{x\to ۱} \frac{x^{۱۰}-۱-۱۰(x-۱)}{(x-۱)^۲} = \lim_{x\to ۱} \frac{(x-۱)(x^۹+x^۸+\dots+x+۱)-۱۰(x-۱)}{(x-۱)^۲}$$

$$= \lim_{x\to ۱} \frac{x^۹+x^۸+\dots+x-۹}{(x-۱)}$$

سپس عبارت $x^۹+x^۸+\dots+x-۹$ را به صورت زیر تجزیه می‌کنیم:

$$A = x^۹+x^۸+\dots+x-(\underbrace{۱+۱+۱+\dots+۱}_{\text{۹ بار}}) = (x^۹-۱)+(x^۸-۱)+(x^۷-۱)+\dots+(x-۱)$$

$$\left.\begin{array}{l} x^۹-۱=(x-۱)(x^۸+x^۷+\dots+x+۱) \\ x^۸-۱=(x-۱)(x^۷+x^۶+\dots+x+۱) \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ x^۲-۱=(x-۱)(x+۱) \\ x-۱ \end{array}\right\} \Rightarrow A=(x-۱)((x^۸+\dots+۱)+(x^۷+\dots+۱)+\dots(x+۱)+۱)$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to ۱} \frac{x^۹+x^۸+\dots+x-۹}{x-۱}$$

$$= \lim_{x\to ۱} \frac{(x-۱)((x^۸+\dots+۱)+(x^۷+\dots+۱)+\dots(x+۱)+۱)}{x-۱}$$

$$= ۹+۸+۷+\dots+۱ = ۲۵$$

۸۳-

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^{10}+x-2}{x^{5}+x-2}=\lim_{x\to 1}\frac{(x^{10}-1)+(x-1)}{(x^{5}-1)+(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^{9}+x^{8}+\dots+x+1)+(x-1)}{(x-1)(x^{4}+x^{3}+\dots+x+1)+(x-1)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x^{9}+x^{8}+\dots+x+2}{x^{3}+x^{3}+\dots+x+2}=\frac{11}{6}$$

۸۴- اگر $\lim\limits_{x\to t}\dfrac{f(x)}{x-t}=K$ و K عددی حقیقی باشد، آن‌گاه $f(t)=0$ است، و در غیر این صورت مقدار حد بی‌کران افزایش خواهد یافت و برابر K نمی‌گردد.

$$x^{2}+ax+b\underset{x\to 1}{\to} 0 \quad \text{و} \quad \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+b)}{x-1}=4\Rightarrow a=2 \quad \text{و} \quad b=-3$$

۸۷-

ب) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}\times\frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}+1}=\lim_{x\to 0}\frac{(x+1)-1}{x(\sqrt{x+1}+1)}=\frac{1}{2}$$

پ) $$\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{t+h}-\sqrt{t}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{t+h}-\sqrt{t}}{h}\times\frac{\sqrt{t+h}+\sqrt{t}}{\sqrt{t+h}+\sqrt{t}}=\lim_{h\to 0}\frac{t+h-t}{h(\sqrt{t+h}+\sqrt{t})}=\frac{1}{2\sqrt{t}}$$

۸۹- **روش اول:**

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}=\lim\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}\times\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}\times\frac{(\sqrt[3]{x})^{2}+\sqrt[3]{x}+1}{(\sqrt[3]{x})^{2}+\sqrt[3]{x}+1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)((\sqrt[3]{x})^{2}+\sqrt[3]{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}=\frac{3}{2}$$

روش دوم:

اگر $\sqrt[6]{x}=t$ فرض شود، عبارت رادیکالی داده‌شده به یک عبارت گویا تبدیل می‌شود.

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}=\lim_{t\to 1}\frac{t^{3}-1}{t^{2}-1}=\lim_{t\to 1}\frac{(t-1)(t^{2}+t+1)}{(t-1)(t+1)}=\frac{3}{2}$$

تذکر

در عبارت‌های کسری و رادیکالی، اگر عبارت‌های $\sqrt[n]{u}$ و $\sqrt[m]{u}$ دیده شوند، می‌توان با فرض $t=\sqrt[[m,n]]{u}$ ، رفع ابهام را انجام داد. توجه کنید $[m\ ,\ n]$ همان کوچک‌ترین مضرب مشترک m و n است. $(m\ ,\ n\in\mathbb{N})$

۹۳- یک روش معمول برای رفع ابهام $\frac{0}{0}$ در حالت‌هایی مشابه این مساله استفاده از تغییر متغیر است.

$$1+x=t^{5}\Rightarrow x=t^{5}-1 \qquad\qquad x\to 0\Rightarrow t\to 1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[5]{1+x}-1}{x}=\lim_{t\to 1}\frac{t-1}{t^{5}-1}=\lim_{t\to 1}\frac{t-1}{(t-1)(t^{4}+t^{3}+t^{2}+t+1)}=\frac{1}{5}$$

-۹۴

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x-1}+(x-1)}{\sqrt[3]{x^2-1}}=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{(x-1)}+\sqrt[3]{(x-1)^3}}{\sqrt[3]{(x-1)(x+1)}}=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x-1}\,(1+\sqrt[3]{(x-1)^2})}{\sqrt[3]{x-1}\,\sqrt[3]{x+1}}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{1+\sqrt[3]{(x-1)^2}}{\sqrt[3]{x+1}}=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$$

-۹۷

$$\lim_{x\to a^+}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}=\lim_{x\to a^+}\left(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{\sqrt{x^2-a^2}}+\frac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}\right)$$

$$=\lim_{x\to a^+}\left(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{\sqrt{x^2-a^2}}\times\frac{\sqrt{x}+\sqrt{a}}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}+\frac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{x-a}\,\sqrt{x+a}}\right)=\frac{1}{\sqrt{2a}}$$

-۹۸

الف) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{3x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 5x}{5x}5x}{3x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}\lim_{x\to 0}\frac{5x}{3x}\xrightarrow{\lim_{u\to 0}\frac{\sin u}{u}=1}1\times\frac{5}{3}=\frac{5}{3}$$

پ) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 6x-\sin 2x}{5x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 6x}{6x}6x-\frac{\sin 2x}{2x}2x}{5x}=\frac{\lim_{x\to 0}\frac{\sin 6x}{6x}\lim 6x-\lim\frac{\sin 2x}{2x}2x}{5x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{6x-2x}{5x}=\frac{4}{5}$$

-۹۹

الف) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax-\sin bx}{ax-bx}=\frac{\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin ax}{ax}ax-\frac{\sin bx}{bx}bx\right)}{\lim_{x\to 0}(ax-bx)}=\lim_{x\to 0}\frac{ax-bx}{ax-bx}=1$$

ب) $$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x\tan 2x\tan 3x\ldots\tan nx}{x^n}=\frac{\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}x\ \lim\frac{\tan 2x}{2x}2x\ \ldots\ \lim\frac{\tan nx}{nx}nx}{\lim_{x\to 0}x^n}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x(2x)\ldots(nx)}{x^n}=1\times 2\times\ldots\times n=n!$$

پ) $x-a=t\Rightarrow x=a+t$ $\qquad x\to a\Rightarrow t\to 0$

$$\lim_{x\to a}\frac{\sin(x-a)}{x^2-a^2}=\lim_{x\to a}\frac{\sin(x-a)}{x-a}\left(\lim_{x\to a}\frac{1}{x+a}\right)=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}\lim_{t\to 0}\frac{1}{2a+t}=\frac{1}{2a}$$

۱۰۰- ب) بسیاری از حدهای مبهم $\frac{0}{0}$ به صورت مثلثاتی با کمک قوانین و فرمول‌های مهم مثلثاتی رفع ابهام می‌شوند. می‌دانیم که $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$ و یا $\sin^2 u = \frac{1-\cos 2u}{2}$. بنابراین:

$$\text{ب)}\ \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{1-\cos x}}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{2\sin^2\frac{x}{2}}}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{2}\,|\sin\frac{x}{2}|}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}}{2\times\frac{x}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

۱۰۱- الف) **روش اول:**

با استفاده از فرمول تبدیل جمع به ضرب خواهیم داشت:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos 4x-\cos 2x}{\cos 3x-\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{-2\sin 3x\sin x}{-2\sin 2x\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{\sin 2x} = \frac{3}{2}$$

روش دوم:

با توجه به اتحاد $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$ و $\sin^2 u = \frac{1-\cos u}{2}$ خواهیم داشت:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos 4x-\cos 2x}{\cos 3x-\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{1-2\sin^2 2x-(1-2\sin^2 x)}{1-2\sin^2\frac{3x}{2}-(1-2\sin^2\frac{x}{2})} = \lim_{x\to 0} \frac{2(\sin^2 x-\sin^2 2x)}{2(\sin^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{3x}{2})}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(\sin x-\sin 2x)(\sin x+\sin 2x)}{(\sin\frac{x}{2}-\sin\frac{3x}{2})(\sin\frac{x}{2}+\sin\frac{3x}{2})} = \lim_{x\to 0} \frac{(x-2x)(x+2x)}{(\frac{x}{2}-\frac{3x}{2})(\frac{x}{2}+\frac{3x}{2})} = \frac{3}{2}$$

۱۰۳-

$$\lim_{x\to a} \frac{\tan x-\tan a}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{\frac{\sin x}{\cos x}-\frac{\sin a}{\cos a}}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{\sin x\cos a-\cos x\sin a}{\cos a\cos x(x-a)}$$

$$= \lim_{x\to a} \frac{\sin(x-a)}{x-a} \lim \frac{1}{\cos x\cos a} = \frac{1}{\cos^2 a}$$

۱۰۵- الف) با فرض $x-\frac{\pi}{3}=t$ ، از $x\to 0$ نتیجه می‌شود $t\to 0$ ، آن‌گاه:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{\sin(x-\frac{\pi}{3})}{x-\frac{\pi}{3}} = \lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$$

۱۰۶-

$$\text{ب)}\ x-1=t \xrightarrow{x=t+1} \lim_{x\to 1^+} \frac{\tan \pi x}{|x-1|} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\tan \pi(t+1)}{t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{\tan(\pi t+\pi)}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0^+} \frac{\tan \pi t}{t} = \pi$$

۱۰۷-

$$x \to 0 \Rightarrow \sin x \to 0 \Rightarrow \sin^2 x \to 0^+ \Rightarrow [\sin^2 x]=0 \qquad [-\sin^2 x]=-1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos 2x+[-\sin^2 x]}{\sin^2 x+[\sin^2 x]}=\lim_{x\to 0} \frac{\cos 2x-1}{\sin^2 x}=\lim_{x\to 0} \frac{-2\sin^2 x}{\sin^2 x}=-2$$

۱۱۶-

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}}{x^2}=\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}}{x^2}\times\frac{1+\cos x\sqrt{\cos 2x}}{1+\cos x\sqrt{\cos 2x}}$$

$$=\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2 x(\cos 2x)}{x^2}\ \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+\cos x\sqrt{\cos 2x}}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2 x(1-2\sin^2 x)}{x^2}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2 x+2\sin^2 x\cos^2 x}{x^2}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x(1+2\cos^2 x)}{x^2}=\frac{3}{2}$$

۱۱۹- راهنمایی: فرض کنید $x-\frac{\pi}{3}=t$ ، آن‌گاه $x=\frac{\pi}{3}+t$ و $\sin(\frac{\pi}{3}+t)$ را بسط دهید.

تذکر

حد بالا همان‌طور که خواهیم دید مشتق تابع $\sin x$ در $x=\frac{\pi}{3}$ است که مشتق تابع $\sin x$ برابر $\cos x$

و مقدار $\cos x$ در $\frac{\pi}{3}$ برابر $\frac{1}{2}$ می‌شود.

۱۲۲-

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}=\lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin x}{\cos x}-\sin x}{\sin^3 x}=\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\cos x\sin^2 x}=\lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{\sin^2 x}\times\lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x}$$

$$=\lim_{x\to 0} \frac{2\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\ \frac{x}{2}\right)^2}{\left(\frac{\sin x}{x}\ x\right)^2}=\frac{1}{2}$$

-۱۲۳

$$3x = 2x + x \Rightarrow \tan 3x = \tan(2x+x) = \frac{\tan 2x + \tan x}{1 - \tan x \tan 2x} \Rightarrow$$

$$\tan 3x - \tan 2x - \tan x = \tan 3x \tan 2x \tan x \Rightarrow$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan 3x - \tan 2x - \tan x}{\sin^3 x} = \frac{\lim (\frac{\tan 3x}{3x} 3x) \lim (\frac{\tan 2x}{2x} 2x) \lim (\frac{\tan x}{x} x)}{(\frac{\sin x}{x} x)^3} = 6$$

-۱۲۴

$x \to 0$

فرض $\cos^{-1} \sqrt{x} = \alpha \Rightarrow \cos\alpha = \sqrt{x} \Rightarrow (x \to 1^-$ و $\alpha \to 0^+)$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{\cos^{-1}\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\alpha}{\sqrt{1-\cos^4\alpha}} = \lim_{\alpha\to 0^+} \frac{\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}\,\sqrt{1+\cos^2\alpha}}$$

$$= \lim_{\alpha\to 0^+} \frac{\alpha}{\sin\alpha} \times \lim_{\alpha\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{1+\cos^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

۱۲۵- نمودار (الف) در $x = a$ پیوسته نیست، زیرا حد تابع با مقدار تابع برابر نیست.

نمودار (ب) در $x = a$ پیوسته نیست، زیرا حد چپ تابع با حد راست و مقدار تابع برابر نیست.

نمودار (پ) در $x = a$ تعریف نشده است؛ از این‌رو بحث درباره‌ی پیوستگی تابع در این نقطه بی‌معنی است.

-۱۲۶

$$f(x) = \begin{cases} x & x > 2 \\ 0 & x = 2 \\ -x+4 & x < 2 \end{cases}$$

۱۲۷- f در بازه‌ی $[1 , +\infty)$ تعریف نشده است. $\qquad f(1) = 0$ و $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 0$

و چون $f(1) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ ، f در $x = 1$ پیوسته است.

g در $x = 1$ پیوسته است $\Rightarrow \lim\limits_{x\to 1^-} g(x) = 0$ و $\lim\limits_{x\to 1^+} g(x) = 0 \qquad g(1) = 0$

تذکر

فرض کنیم f در همسایگی راست $x=a$ تعریف شده باشد؛ f در این نقطه پیوسته است. اگر $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=f(a)$ ؛ فرض کنیم f در همسایگی چپ a تعریف شده باشد در این صورت f در $x=a$ پیوسته است، اگر $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=f(a)$.

۱۲۸- در حالتی که $x=۱$ ، $x\neq ۱$ است. پس:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to ۱} f(x)=\lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{x^۲-۱}{x-۱}=\lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{(x-۱)(x+۱)}{x-۱}=۲\\ f(۱)=۲\end{array}\right\}\Rightarrow$$

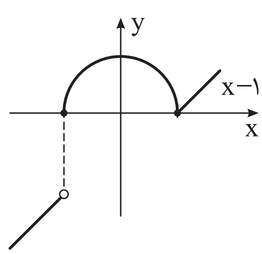
f در $x=۱$ پیوسته است.

-۱۳۰

$$\lim\limits_{x\to ۰} f(x)=\lim\limits_{x\to ۰}\frac{\sin ۳x}{x}=۳\lim\limits_{x\to ۰}\frac{\sin ۳x}{۳x}=۳$$

$$f(۰)=a \xRightarrow{\text{f در x=۰ پیوسته است}} a=۳$$

-۱۳۱



$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{۱-x^۲} & -۱\le x\le ۱\\ x-۱ & x>۱ \text{ یا } x<-۱\end{cases}$$

$\lim\limits_{x\to ۱^-} f(x)=۰$ و $\lim\limits_{x\to ۱^+} f(x)=۰$ و $f(۱)=۰\Rightarrow$ f در $x=۱$ پیوسته است.

$\lim\limits_{x\to -۱^+} f(x)=۰$ و $f(-۱)=۰$ و $\lim\limits_{x\to -۱^-} f(x)=-۲$. f در $x=-۱$ ناپیوسته است.

۱۳۳- چون f در $x=۱$ پیوسته است، نتیجه می‌گیریم:

$$f(۱)=\lim\limits_{x\to ۱^+} f(x)=\lim\limits_{x\to ۱^-} f(x)$$

$$f(۱)=[\sqrt{۲}\times ۱]=۱ \quad \text{و} \quad \lim\limits_{x\to ۱^+} f(x)=\lim\limits_{x\to ۱^+}\frac{b(x-۱)(x+۱)}{(x-۱)}=۲b$$

$$\lim\limits_{x\to ۱^-} f(x)=[۲^-]+a=۱+a\Rightarrow ۱=۱+a=۲b\Rightarrow a=۰ \quad \text{و} \quad b=\frac{۱}{۲}$$

-۱۳۵

$$\lim\limits_{x\to ۰} f(x)=\lim\limits_{x\to ۰}\frac{\sqrt[۳]{x+۲۷}-۳}{x}\times\frac{(\sqrt[۳]{x+۲۷})^۲+۳\sqrt[۳]{x+۲۷}+۹}{(\sqrt[۳]{x+۲۷})^۲+۳\sqrt[۳]{x+۲۷}+۹}$$

$$\Rightarrow \lim\limits_{x\to ۰} f(x)=\lim\limits_{x\to ۰}\frac{x+۲۷-۲۷}{x\left((\sqrt[۳]{x+۲۷})^۲+۳\sqrt[۳]{x+۲۷}+۹\right)}=\frac{۱}{۲۷}\Rightarrow f(۰)=\frac{۱}{۲۷}$$

۱۳۶- با توجه به قضیه‌ی فشردگی خواهیم داشت: $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}=0$، از این‌رو $f(0)=a=0$.

۱۳۷- اگر $x^2+mx+1\neq 0$ ، آن‌گاه تابع همواره پیوسته خواهد بود و اگر معادله‌ی $x^2+mx+1=0$ به ازای مقادیری از m دارای جواب باشد، چون ریشه‌های مخرج کسر در دامنه قرار ندارند، تابع در بقیه‌ی نقاط پیوسته خواهد بود از این‌رو به ازای همه‌ی مقادیر m تابع f روی دامنه‌اش پیوسته است.

۱۳۸-

$$f(x)=\sqrt{x^5-x^4}=\sqrt{x^4(x-1)}=x^2\sqrt{(x-1)}\Rightarrow D_f=\{0\}\cup[1,+\infty)$$

تابع f در همه‌ی نقاط دامنه خود به استثناء صفر که فاقد همسایگی است، پیوسته است.

۱۴۱-

تذکر

اگر f و g در $x=a$ پیوسته باشند، آن‌گاه $f \overset{\pm}{\times} g$ همواره پیوسته و $\frac{f}{g}$ به شرط $g(a)\neq 0$ پیوسته است.

اگر f و g در $x=a$ ناپیوسته باشند $f\pm g$ و $f \overset{\times}{\div} g$ همواره نامشخص است.

اگر f در $x=a$ پیوسته و g ناپیوسته باشد $f\pm g$ و $\frac{g}{f}$ $(f(a)\neq 0)$ همواره ناپیوسته و $f \overset{\times}{\div} g$ نامشخص است.

۱۴۲-

$$f(x)=\begin{cases} x & x\geq 0 \\ 1 & x<0 \end{cases} \quad \text{و} \quad g(x)=\begin{cases} x & x\geq 0 \\ -1 & x<0 \end{cases}$$

۱۴۳- $f(x)=\sin\pi x$ و $g(x)=(-1)^{[x]}$ به ترتیب در $x=1$ پیوسته و ناپیوسته‌اند و $f\times g$ پیوسته است. (چرا؟)

۱۴۴- تابع $f(x)=\begin{cases} 1 & x\geq 0 \\ -1 & x<0 \end{cases}$ در $x=0$ ناپیوسته است، اما $|f(x)|=1$ همواره پیوسته است.

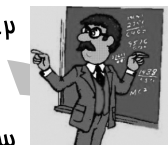
تذکر

اگر $f(x)$ در $x=a$ پیوسته باشد، $|f(x)|$ نیز در $x=a$ پیوسته است؛ اما عکس قضیه لزوماً برقرار نیست.

۱۴۵-

۱- اگر $f(x)=x(x-1)$ و $g(x)=[x]$ فرض شود، آن‌گاه f و g در $x=1$ به ترتیب پیوسته و ناپیوسته‌اند، اما fog در $x=1$ پیوسته است و اگر $f(x)=x^2$ و $g(x)=[x]$ فرض شوند، fog در $x=1$ ناپیوسته است. (حد و مقدار این مثال‌ها را به دست آورید.)

نکته:



۲- اگر f در $x=a$ پیوسته باشد، آن‌گاه $\sqrt[n]{f(x)}$ در $x=a$ پیوسته است (اگر n زوج باشد، باید $f(x)\geq 0$ باشد).

۳- توابع چندجمله‌ای همواره پیوسته‌اند.

۴- اگر f پیوسته و چندجمله‌ای باشد، تابع $\frac{1}{f}$ در $f\neq 0$ پیوسته است.

۱۴۷-

قضیه

اگر تابع g در $x=a$ پیوسته و f در $g(a)$ پیوسته باشد، آن‌گاه:

$$\lim_{x\to a} f(g(x))=f\left(\lim_{x\to a} g(x)\right)$$

۱۴۸- اثبات بخش اول ساده است. در بررسی بخش دوم توجه کنید.

$$h(x)=f(x)\,g(x)=\begin{cases}-x^3 & x<0\\ x^3 & x\geq 0\end{cases} \qquad \text{و} \qquad f(x)=f(g(x))=1$$

از این‌رو fog و $f\times g$ ، $x=0$ پیوسته‌اند.

۱۴۹- از برهان خلف استفاده کنید.

۱۵۱- برای بررسی پیوستگی ترکیب دو تابع می‌توان از تشکیل ضابطه تابع مرکب استفاده کرد.

$$f(x)=\frac{1}{x-1}\Rightarrow f(f(x))=\frac{1}{\frac{1}{x-1}-1}=\frac{x-1}{2-x} \qquad (x\neq 1\,,2)$$

از این‌رو f و fof هر دو در $x=3$ پیوسته‌اند. تابع fof در دامنه تعریف خود پیوسته است. $(\mathbb{R}-\{1,2\})$

۱۵۲- فرض کنید f تابعی فرد است؛ در این صورت $f(-x)=-f(x)$؛ و در $x=۰$ از $f(۰)=-f(۰)$ نتیجه می‌گیریم $f(۰)=۰$.

برای محاسبه‌ی حد تابع $f(x)$ در $x \to ۰^-$ از روش تغییر متغیر استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to ۰^-} f(x)=\lim_{-x\to ۰^+}(-f(-x))=-\lim_{-x\to ۰^+} f(-x) \overset{-x=t}{=\!=\!=} -\lim_{t\to ۰^+} f(t)=-\lim_{x\to ۰^+} f(x)$$

و چون حد راست تابع $f(x)$ برابر $f(۰)$ و $f(۰)$ برابر صفر است، نتیجه می‌گیریم حد چپ تابع نیز برابر صفر و تابع در $x=۰$ پیوسته است.

بخش دوم همانند بخش اول، اما ساده‌تر حل می‌شود.

۱۵۳-

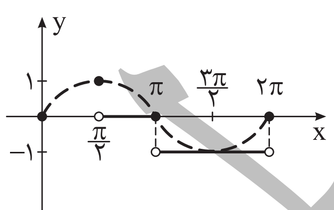
f ناپیوسته است. $\Leftarrow \lim_{x\to ۰^-} f(x)=-۱$ و $\lim_{x\to ۰^+} f(x)=۰$ و $f(x)=[x]\Rightarrow f(۰)=۰$

g پیوسته است. $\lim_{x\to ۰^-} g(x)=۰$ و $\lim_{x\to ۰^+} g(x)=۰$ و $g(x)=[x^۲]\Rightarrow g(۰)=۰$

تذکر

اگر f تابعی پیوسته باشد، آن‌گاه $[f(x)]$ در نقاطی که f برابر عدد صحیح شود، ناپیوسته است، مگر f در این نقطه دارای می‌نیمم نسبی باشد.

۱۵۵-



$$\lim_{x\to \frac{\pi}{۲}} [\sin x]=۰ \quad \text{و} \quad [\sin\frac{\pi}{۲}]=۱$$

$$\lim_{x\to \frac{۳\pi}{۲}} [\sin x]=[\sin\frac{۳\pi}{۲}]=-۱$$

۱۵۶- از راه محاسبه می‌توان به مساله پاسخ داد. می‌خواهیم مساله را با کمک قضیه‌های پیوستگی بررسی کنیم. می‌دانیم که $\sqrt{x}$ در $x=۳$ و $x=۹$ پیوسته است (چون x پیوسته و در شرایط مساله مثبت است.)؛ می‌دانیم که $[\sqrt{x}]$ در نقاطی که $\sqrt{x}=\mathbb{Z}$ باشد ناپیوسته است، پس $[\sqrt{x}]$ در $x=۳$ پیوسته و در $x=۹$ ناپیوسته است؛ چون مجموع دو تابع پیوسته تابعی پیوسته و مجموع (تفاضل) دو تابع یکی پیوسته و دیگری ناپیوسته تابعی ناپیوسته است، پس f در $x=۳$ پیوسته و در $x=۹$ ناپیوسته است.

۱۶۰- f پیوسته و g ناپیوسته است. (g در $x=0$ ناپیوسته است.)

تعریف

تابع f را پیوسته می‌نامیم، هرگاه در تمام نقاط دامنه‌ی خود، پیوسته باشد.

۱۶۱- الف) $1-x^2$ تابعی است چندجمله‌ای و پیوسته و چون $\sqrt{1-x^2}$ در دامنه‌ی خود یعنی $[-1,1]$ همواره مثبت و نامنفی است پس $\sqrt{1-x^2}$ در دامنه‌ی خود پیوسته است.

ب) دامنه‌ی تابع g به صورت $x \geq 3$ است و این تابع نیز در دامنه‌ی تعریف خود پیوسته است. تابع $h(x)$ در دامنه‌ی تعریف خود یعنی $\mathbb{R}$ پیوسته نیست،

ج) این تابع در نقاط $x=\mathbb{Z}$ ناپیوسته است.

-۱۶۲

$$1<x<2 \Rightarrow [x]=1 \Rightarrow f(x)=x^2 \text{ (همواره پیوسته)}$$

پس f در بازه‌ی $(1,2)$ پیوسته است؛ در این صورت باید پیوستگی آن را در $x=1$ بررسی نمود.

$f(1)=1$ و $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=1 \Rightarrow$ پس $f(x)$ در بازه‌ی $[1,2)$ پیوسته است.

تعریف

۱- **تابع f را در بازه‌ی (a,b) پیوسته می‌نامیم، هرگاه در تمام نقاط داخل بازه پیوسته باشد.**

۲- **تابع f را در بازه‌ی $[a,b)$ پیوسته می‌نامیم، هرگاه در تمام نقاط داخل بازه باز (a,b) پیوسته باشد و تساوی $f(a)=\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ برقرار باشد.**

۳- **تابع $f(x)$ را در بازه‌ی $[a,b]$ پیوسته می‌نامیم، هرگاه در بازه‌ی باز (a,b) پیوسته باشد و داشته باشیم:**

$$f(a)=\lim_{x\to a^+} f(x) \quad \text{و} \quad f(b)=\lim_{x\to b^-} f(x)$$

۱۶۳- باید دامنه‌ی تعریف تابع را مشخص کرد.

$$\frac{1-x}{x-2} \geq 0 \Rightarrow D_f=[1,2)$$

پس f در بازه‌ی $[1,2)$ پیوسته است.

۱۶۴- $[Kx]$ در نقاطی که Kx برابر عدد صحیح شود ناپیوسته است؛ پس $[\frac{x}{2}]$ در $x=2\,,4$ و $[\frac{x}{3}]$ در $x=3$ ناپیوسته؛ از این رو f مطابق قضیه‌های پیوستگی در $x=2\,,3\,,4$ ناپیوسته است.

۱۶۶- سه‌جمله‌ای x^2+mx+3 را در نظر می‌گیریم. اگر $\Delta<0$ ، آن‌گاه علامت سه‌جمله‌ای همواره مثبت و تابع در $\mathbb{R}$ تعریف شده و پیوسته خواهد بود.

$$\Delta=m^2-12 \Rightarrow \Delta<0 \Rightarrow -2\sqrt{3}<m<2\sqrt{3}$$

۱۶۷- $[x]$ در $\mathbb{Z}$ ناپیوسته و $(2-x)$ همواره پیوسته است. مطابق قضایای حدی، ضرب تابع پیوسته در ناپیوسته از لحاظ پیوستگی وضعیت مشخصی ندارد و باید ویژگی آن را بررسی نمود:

$f(2)=0$ و $\lim\limits_{x\to2^+} f(x)=0$ و $\lim\limits_{x\to2^-} f(x)=0 \Rightarrow$ f در ۲ پیوسته است.

$f(1)=-1$ و $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=-1$ و $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=0 \Rightarrow$ f در ۱ ناپیوسته است.

$f(0)=0$ و $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=0 \Rightarrow$ f در صفر پیوسته است.

$f(3)=3$ و $\lim\limits_{x\to3^-} f(x)=2 \Rightarrow$ f در ۳ ناپیوسته است.

پس f در نقاط ۱ و ۳ ناپیوسته است.

۱۶۸- تابع خطی در همه‌ی نقاط پیوسته و جزء صحیح آن در نقاطی که تابع عضو $\mathbb{Z}$ شود، ناپیوسته است.

$$\frac{x-1}{3}=\mathbb{Z} \Rightarrow x=3\mathbb{Z}+1 \xrightarrow{\mathbb{Z}=0} x=1$$

دکارت :

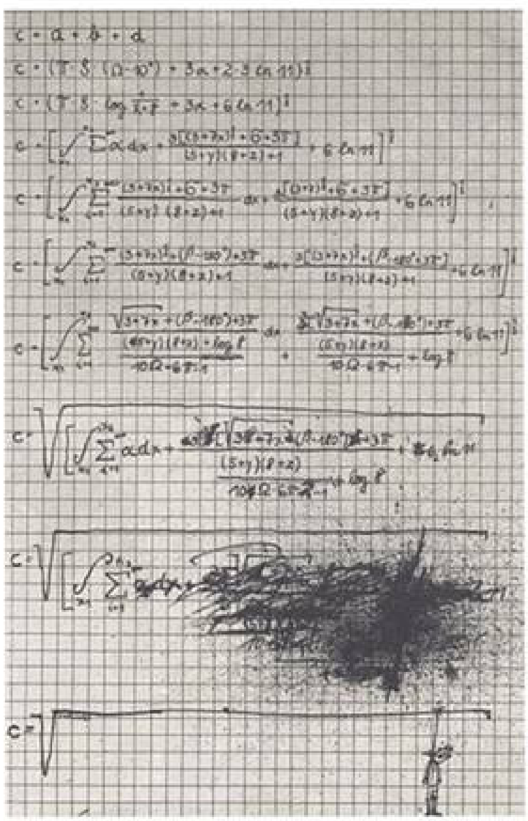
داشتن یک ذهن خوب کافی نیست. آن‌چه مهم است استفاده‌ی صحیح از آن است.

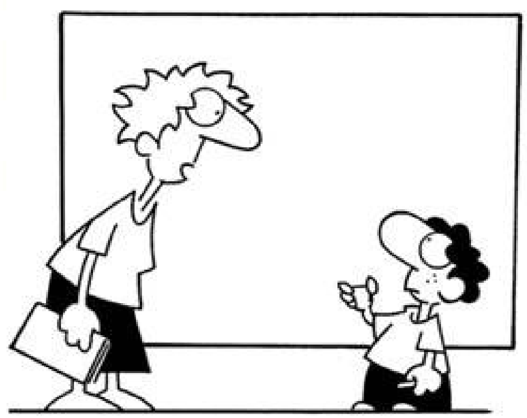
فصل پنجم

مشتق توابع

نویسندگان و ویراستاران:استادان خادمی و نصر

راه حل خنده دار یک دانش آموز در ریاضی





فرمول‌های مشـــتق

۱- $y=k \to y'=0 \to (k\in \mathbb{R})$

۲- $y=x \to y'=1$

۳- $y=ax+b \to y'=a$

۴- $y=ax^{n} \to y'=nax^{n-1}$

۵- $y=u^{n} \to y'=nu'u^{n-1} \to$ u تابعی از x باشد.

۶- $y=\sin x \to y'=\cos x \to y=\sin u \Rightarrow y'=u'\cos u$

۷- $y=\cos x \to y'=-\sin x \to y=\cos u \Rightarrow y'=-u'\sin u$

۸- $y=\tan x \to y'=1+\tan^{2} x \to y=\tan u \Rightarrow y'=u'(1+\tan^{2} u)$

۹- $y=\cot x \to y'=-\left(1+\cot^{2} x\right) \to y=\cot u \Rightarrow y'=-u'(1+\cot^{2} u)$

۱۰- $y=\sin^{n} x \to y'=n\cos x \cdot \sin^{n-1} x$

۱۱- $y=\cos^{n} x \to y'=-n\sin x \cdot \cos^{n-1} x$

۱۲- $y=\tan^{n} x \to y'=n\left(1+\tan^{2} x\right)\tan^{n-1} x$

۱۳- $y=\cot^{n} x \to y'=-n\left(1+\cot^{2} x\right)\cot^{n-1} x$

۱۴- $y=\sin^{-1} u \to y'=\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^{2}}}$

۱۵- $y=\cos^{-1} u \to y'=\dfrac{-u'}{\sqrt{1-u^{2}}}$

۱۶- $y=\tan^{-1} u \to y'=\dfrac{u'}{1+u^{2}}$

۱۷- $y=\cot^{-1} u \to y'=\dfrac{-u'}{1+u^{2}}$

۱۸- $y=|u| \to y'=\dfrac{u.u'}{|u|}$

۱۹- $y=\sqrt{u} \to y'=\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$

۲۰- $y=\sqrt[m]{u^{n}} \to y'=\dfrac{nu'}{m\sqrt[m]{u^{m-n}}}$

۲۱- $y=u\cdot v \to y'=u'v+v'u$

۲۲- $y=\dfrac{u}{v} \to y'=\dfrac{u'v-v'u}{v^{2}}$

۲۳- $y=\dfrac{1}{u} \to y'=\dfrac{-u'}{u^{2}}$

فصل پنجم
مشتق توابع

۱- با استفاده از تعریف مشتق مقدار مشتق تابع $f(x)=\frac{۱}{\sqrt{x}}$ را در $x=۴$ بیابید.

※ ۲- با استفاده از تعریف مشتق مقدار مشتق $f(x)=\sqrt[۳]{x+۱}$ را در $x=۷$ بیابید.

۳- خط گذرنده از دو نقطه‌ی $x=a$ و $x=a+h$ روی منحنی $y=\sqrt{x}$ را Δ می‌نامیم. اگر $h\to ۰$ آن‌گاه، شیب خط Δ را بیابید.

۴- بدون استفاده از قواعد مشتق‌گیری، معادله‌ی خط مماس بر منحنی $f(x)=\frac{۱}{x^{۲}+۱}$ را در $x=۱$ بیابید.

※ ۵- بدون استفاده از قواعد مشتق‌گیری، معادله‌ی خط قائم بر منحنی $f(x)=\sqrt{۱-x^{۲}}$ را در $x=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ بیابید.

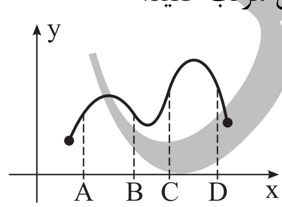
۶- اگر $f(x)=\sqrt{x}$ باشد، حاصل $\lim\limits_{h\to ۰}\frac{f(x_۰+۲h)-f(x_۰-h)}{h}$ را بیابید.

۷- برای تابع $f(x)=\frac{|x-۱|+۱}{|x|+۱}$ حاصل $\lim\limits_{\Delta x\to ۰^+}\frac{f(۱-۲\Delta x)-f(۱)}{\Delta x}$ را بیابید.

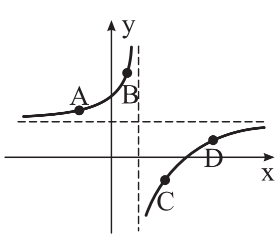
۸- اگر $h(x)=\frac{(x+۱)f(x)}{(۲x+۱)f(۲x+۱)}$ باشد و $f(x)$ در $\mathbb{R}$ پیوسته و غیرصفر باشد، مقدار مشتق تابع h را با استفاده از تعریف مشتق در $x=-۱$ به دست آورید.

※ ۹- مشتق تابع $f(x)=\frac{(x-۱)\sqrt[۵]{۳x-۲}}{(۵x-۳)^{۲}}$ را در نقطه‌ی $x=۱$ بیابید. **(سراسری – ۸۳)**

۱۰- مشتق تابع در چهار نقطه‌ی داده‌شده روی شکل را از بیش‌ترین به کم‌ترین مرتب کنید.



※ ۱۱- مشتق تابع در چهار نقطه‌ی داده‌شده روی شکل را از بیش‌ترین به کم‌ترین مرتب کنید.



※ ۱۲- با استفاده از تعریف مشتق حد عبارت $\frac{۴\sqrt{x}-۲}{۴x-۱}$ را وقتی $x\to\frac{۱}{۴}$ بیابید.

۱۳- مشتق‌های چپ و راست تابع $f(x)=x\sqrt{x^2-4x+4}$ را در $x=2$ بیابید.

※ ۱۴- مشتق راست تابع $f(x)=\sqrt{x-3}$ را در $x=3$ بیابید.

۱۵- مقدار مشتق‌های چپ و راست تابع $f(x)=|\sin \pi x|$ را در $x=0$ بیابید.

※ ۱۶- مشتق‌پذیری تابع $f(x)=\sqrt{\sin^2 x(x+2)}$ را در نقطه‌ی $x=0$ بررسی کنید.

※ ۱۷- مشتق‌پذیری $f(x)=\sqrt[3]{x-1}$ را در $x=1$ بررسی کنید.

۱۸- زاویه‌ی خط مماس بر $f(x)=\sqrt{|x-1|}$ در $x=1$ را با جهت مثبت محور طول‌ها بیابید.

۱۹- به ازای کدام مقدار a تابع $f(x)=x|x-1|+a|x-1|$ در $x=1$ مشتق‌پذیر است؟

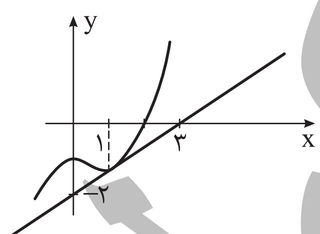
۲۰- مقدار مشتق‌های چپ و راست تابع $f(x)=\begin{cases} x+1 & x\geq 0 \\ -x+1 & x<0 \end{cases}$ را در $x=0$ بیابید.

※ ۲۱- مقدار مشتق‌های چپ و راست تابع $f(x)=\begin{cases} 8x & x\geq 0 \\ 4x^2 & x<0 \end{cases}$ را در $x=1$ بیابید.

۲۲- مشتق چپ تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}$ در نقطه‌ی $x=0$ کدام است؟ (سراسری – ۸۹)

۱) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۲) $-\sqrt{2}$ ۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۴) $\sqrt{2}$

۲۳- با توجه به شکل مقابل حاصل $\lim\limits_{K\to\infty} K(f(1+\frac{1}{K})-f(1))$ را بیابید.



۲۴- همه‌ی خطوط صفحه‌ی مختصات که موازی خط $y=3x$ هستند را، رسم می‌کنیم. در کدام نقطه یکی از این خط‌ها بر منحنی $y=x^2-3x$ مماس می‌گردد؟

۲۵- در تمام نقاط منحنی $y=x^2+2$ مماس‌هایی بر آن رسم می‌کنیم. در کدام نقطه از منحنی خط مماس، از مبداء مختصات عبور می‌کند؟

۲۶- همه‌ی خطوط مماس بر منحنی $y=x^2+x$ را رسم می‌کنیم. در کدام نقطه از منحنی خط مماس از نقطه‌ی $(0,-1)$ عبور می‌کند؟ (سراسری – ۸۵ با کمی تغییر)

۲۷- اگر f تابعی مشتق‌پذیر در نقطه‌ای مانند x باشد:

ثابت کنید به ازای هر عدد دلخواه a ، b و c ، تابع $g(x)=f(ax+b)+c$ در نقطه‌ی $x=ax_0+b$ مشتق‌پذیر می‌گردد و $g'(x)=af'(ax+b)$.

※ ۲۸- اگر f تابعی باشد که روی $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر باشد و $g(x)=f(x^2)$، آن‌گاه ثابت کنید $g'(x)=2xf'(x^2)$.

۲۹- اگر $f'(x)=\frac{x^۲-۱}{\sqrt{۵+x^۲}}$ باشد، مشتق تابع $f(\frac{۱}{\sqrt{x}})$ را در $x=\frac{۱}{۴}$ بیابید.

❋ ۳۰- اگر $f'(x)=\sqrt{x^۲+۱}$ باشد، مشتق تابع $y=f(x-۵x^۲)$ را نسبت به x تعیین کنید.

۳۱- اگر $\lim\limits_{h\to ۰}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{۱}{\sqrt{۱+x^۲}}$ مشتق تابع $f(\tan x)$ با شرط $|x|<\frac{\pi}{۲}$ را بیابید. (سراسری – ۸۵)

❋ ۳۲- اگر $f(x)=g(x^۲-۳x)$ و $g'(-۲)=۸$ باشد. مقدار $f'(۱)$ را بیابید.

۳۳- مشتق توابع زیر را بیابید.

❋ الف) $f(x)=(x^۳-x+۱)^۴$

❋ ب) $f(x)=\frac{x+۱}{(x^۲-۵)^{۱۰}}$

❋ پ) $f(x)=\sqrt{۵x-۳}$

ت) $f(x)=\sqrt[۳]{۵x-۳}$

ث) $f(x)=\frac{۱}{\sqrt[۶]{۵x-۳}}$

❋ ج) $f(x)=\sqrt{\frac{۳x-۱}{x+۲}}$

❋ چ) $f(x)=(\sqrt{x^۲+۱}+x)^{۱۴}$

ح) $f(x)=(\frac{\sqrt{x^۲-۱}}{۳-x})^۴$

❋ خ) $f(x)=\sqrt[۷]{(\frac{۱۰x-۱}{x^۲+x})^۳}$

❋ د) $f(x)=\frac{(x+۱)^۲(x^۲-۳)^۳}{\sqrt{x^۲+۵x}}$

ذ) $f(x)=\sqrt{x^۲+\sqrt{۱-x^۲}}$

ر) $f(x)=(\sqrt{۱+\sqrt{۱+\sqrt{۱-x^۲}}})^۳$

❋ ز) $f(x)=\sqrt[۴]{x^۲\sqrt[۳]{x\sqrt{x}}}$

۳۴- مشتق عبارت $(\frac{۱۶}{x}-\sqrt[۳]{x^۲})^۲$ به ازای $x=-۸$ کدام است؟ (سراسری – ۸۷)

❋ ۳۵- اگر $f(x)=(x-۱)(x-۲)\dots(x-۱۰)$ باشد. مقدار $f'(۱)$ را بیابید.

* ۳۶- اگر $y_1=\dfrac{x^3+4x-1}{x^2+1}$ و $y_2=\dfrac{-x^5+4x-1}{x^2+1}$ چه رابطه‌ای بین مشتق‌های دو تابع y_1 و y_2 وجود دارد؟

* ۳۷- اگر $y=(\sqrt{x^2+a}+x)^{10}$ و $z=(\sqrt{x^2+a}-x)^{10}$ باشد. حاصل $y'z+z'y$ را بیابید.

* ۳۸- تابع $f(x)=x^3+ax^2+bx+2$ مفروض است. a و b را طوری بیابید که منحنی در نقطه‌ای به طول $x=1$ بر محور طول‌ها مماس باشد.

* ۳۹- m را طوری بیابید که $f(x)=x^3+3x+m$ بر محور طول‌ها مماس باشد.

۴۰- خط $y=K$ را به موازات محور xها بالا و پایین می‌بریم تا فقط در یک نقطه بر منحنی $y=\dfrac{x^2+ax+1}{x^2+x+3}$ مماس شود. a را بیابید.

۴۱- خطوط افقی صفحه‌ی مختصات را رسم می‌کنیم. در چند نقطه این خطوط بر منحنی $y=|x^2+x|$ مماس می‌گردند؟ (به کمک رسم حل کنید.)

۴۲- نقاطی در صفحه بیابید که از آن نقاط دو خط مماس بر سهمی $y=x^2$ بتوان رسم کرد و این خطوط بر هم عمود باشند. این مساله چند جواب دارد؟ مجموعه جواب‌های این مساله را ترسیم کنید.

(تمرین کتاب درسی)

۴۳- نقاط منحنی $f(x)=-\dfrac{1}{x}$ را در بازه‌ی $[\dfrac{1}{\sqrt[4]{3}},1]$ در نظر بگیرید. اگر نقطه‌ای روی منحنی از $x=\dfrac{1}{\sqrt[4]{3}}$ به سمت $x=1$ حرکت کند و در هر نقطه مماسی بر منحنی رسم کنیم، اختلاف بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین زاویه‌ی خط مماس بر منحنی با محور طول‌ها را بیابید.

۴۴- اگر $f(x)=x^{\frac{m}{n}}$ $(m,n\in\mathbb{Z},n\neq 0)$ باشد، آن‌گاه ثابت کنید: $f'(x)=\dfrac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1}$

۴۵- تانژانت زاویه‌ی بین دو نیم‌مماس تابع $f(x)=\sqrt{1-\sqrt{\cos ax}}$ در مبداء مختصات برابر $\dfrac{4}{3}$ است. چند مقدار برای a وجود دارد؟

۴۶- توابع $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ و $g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ مفروضند؛ به‌طوری که به ازای هر x و y داریم:

$$\begin{cases} f(x+y)=f(x).f(y) \\ f(x)=1+x\times g(x) \\ \lim\limits_{x\to 0} g(x)=1 \end{cases}$$

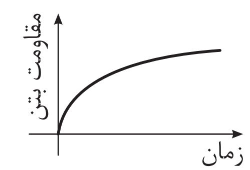
مطلوب است مشتق f در نقطه‌ی دلخواه x_0 . (المپیاد ایران)

* ۴۷- اگر $f(x)=\dfrac{3}{2}-\sqrt{x+2}$، مشتق تابع $f(xf(x))$، در نقطه‌ی $x=2$ کدام است؟ (سراسری – ۸۹)

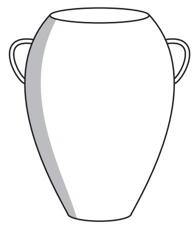
۱) ۱− ۲) ۱ ۳) صفر ۴) موجود نیست.

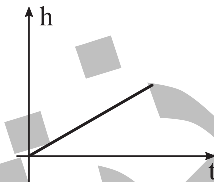
آهنگ تغییرات و یکنوایی

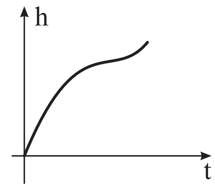
۴۸- نمودار افزایش مقاومت بتن با گذشت زمان به صورت زیر است.
با کمک آهنگ تغییرات و خط مماس، رفتار آن را تحلیل کنید.

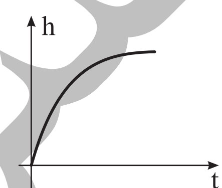


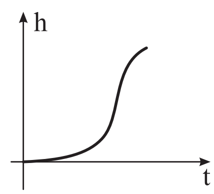
۴۹- در ظرفی به شکل روبه‌رو با نرخ ثابت در هر دقیقه یک لیتر آب می‌ریزیم. کدام یک از نمودارهای زیر می‌تواند نشان‌دهنده‌ی ارتفاع آب برحسب زمان باشد؟ **(المپیاد ایران – ۸۳)**

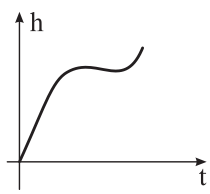


الف)


ب)


پ)


ت)


ث)


۵۰- آهنگ تغییرات مساحت یک مربع نسبت به محیط آن را، اگر طول ضلع مربع ۲ واحد باشد، بیابید.

* ۵۱- آهنگ تغییرات حجم یک مکعب نسبت به سطح آن را بیابید.

* ۵۲- اگر آهنگ افزایش شعاع یک دایره $۱cm / s$ باشد، آهنگ آنی تغییرات مساحت آن را نسبت به زمان بیابید.

۵۳- بادکنکی کروی توسط تلمبه‌ای در لحظه‌ی $t = ۰$ شروع به باد شدن می‌کند. در هر ثانیه ۶سانتی‌متر مکعب هوا وارد بادکنک می‌شود. حداکثر حجمی که این بادکنک تحمل می‌کند $\frac{۳۲۰۰۰}{۳}\pi$ سانتی‌متر مکعب است.

الف) آهنگ تغییرات شعاع بادکنک نسبت به زمان در هر لحظه چه‌قدر است؟

ب) آهنگ تغییرات مساحت سطح بادکنک نسبت به زمان در هر لحظه چه‌قدر است؟

پ) آهنگ تغییرات شعاع بادکنک نسبت به سطح بادکنک (در هر مقداری از سطح بادکنک) چه‌قدر است؟

ت) در آخرین لحظه که بادکنک می‌ترکد، آهنگ تغییرات سطح بادکنک نسبت به شعاع بادکنک چه‌قدر است؟ **(تمرین کتاب درسی)**

* ۵۴- معادله‌ی حرکت متحرکی $f(t) = t^۳ - ۳t + ۲$ می‌باشد. در کدام لحظه سرعت متحرک صفر می‌گردد؟

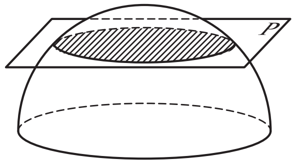
۵۵- برای تصفیه‌ی یک محلول، از یک ظرف مخروطی که در رأس آن سوراخ بسیار ریزی تعبیه شده است، استفاده می‌کنیم. با فرض این‌که ارتفاع مخروط $۱۶cm$ و شعاع آن $۴cm$ باشد و محلول با سرعت ثابت $۲cm^۳ / s$ از ظرف خارج شود؛ هنگامی که ارتفاع محلول $۸cm$است، سرعت کاهش ارتفاع محلول در ظرف چه‌قدر است؟

* ۵۶- در لحظه‌ای که شعاع یک حباب کروی صابون $0/5\,cm$ و آهنگ تغییر حجم حباب $1/6\,cm^3/s$ باشد؛ شعاع حباب با چه سرعتی افزایش می‌یابد؟

۵۷- در مثلثی به طول قاعده‌ی ۳۲ و ارتفاع ۲۸ واحد خطی موازی قاعده با سرعت ۰/۰۲ واحد در ثانیه به رأس مقابل نزدیک می‌شود و با دو ضلع دیگر مثلث، مثلث‌های متشابه می‌سازد. در لحظه‌ای که فاصله‌ی این خط تا رأس مقابل ۷ واحد شود، سرعت کاهش این مساحت‌ها کدام است؟ **(سراسری – ۷۹)**

۱) ۰/۰۷ ۲) ۰/۰۸ ۳) ۰/۱۴ ۴) ۰/۱۶

* ۵۸- در یک نیم‌کره به شعاع ۲۵ واحد، صفحه‌ی P همواره موازی صفحه‌ی قاعده با سرعت ۰/۰۴ از آن دور می‌شود. در حالی‌که فاصله‌ی دو صفحه ۱۲ واحد است. سرعت کاهش مساحت دایره مقطع صفحه‌ی P و نیم‌کره کدام است؟



(سراسری – ۸۷)

۵۹- مثلثی ساخته‌ایم که طول دو ضلع آن ۴ و ۵ است و زاویه‌ی بین آن‌ها را متغیر α قرار می‌دهیم:

الف) آهنگ تغییرات مساحت این مثلث را نسبت به α در زاویه‌ی α. به دست آورید.

ب) در کدام زاویه‌ها، آهنگ تغییرات منفی است؟

پ) در کدام زاویه‌ها، آهنگ تغییرات مثبت است؟

ت) در کدام زاویه، آهنگ تغییرات صفر است و در این مساحت مثلث به دست‌آمده چه ویژگی دارد؟

(تمرین کتاب درسی)

۶۰- مثلثی ساخته‌ایم که طول دو ضلع آن ۱ و ۳ می‌باشد و زاویه‌ی بین این دو ضلع α است که قابل تغییر از صفر تا π رادیان است. طول ضلع سوم را L بنامید.

الف) L را برحسب α و آهنگ تغییرات L نسبت به α را به دست آورید. علامت آهنگ تغییرات چیست و چه معنایی دارد؟

ب) α را برحسب L و آهنگ تغییرات α نسبت به L را به دست آورید. علامت آهنگ تغییرات چیست و چه معنایی دارد؟ **(تمرین کتاب درسی)**

۶۱- صعودی و نزولی بودن تابع $y=\dfrac{x^2+x}{x^2+x+1}$ را بررسی کنید.

* ۶۲- صعودی و نزولی بودن تابع $f(x)=x\sqrt{4-x^2}$ را در بازه‌ی $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$ بررسی کنید.

* ۶۳- حدود K را طوری بیابید که $f(x)=\dfrac{K\cos x}{1+\cos x}$ در بازه‌ی $(0,\pi)$ نزولی باشد.

مشتق توابع مثلثاتی

۶۴- مشتق تابع $f(x)=\frac{1}{\sin x}$ در $x=\frac{\pi}{4}$ را بیابید.

* ۶۵- ثابت کنید مشتق تابع $f(x)=\sin^2 3x$ در نقطه‌ی x برابر $3\sin 6x_0$ می‌گردد.

۶۶- ثابت کنید مشتق $f(x)=\sqrt{\tan x}$ در نقطه‌ی x_0 برابر $\frac{1+\tan^2 x_0}{2\sqrt{\tan x_0}}$ می‌گردد.

۶۷- مشتق توابع زیر را بیابید.

* الف) $f(x)=\frac{\tan x}{1-2\cos x}$

* ب) $f(x)=\cos^3 \frac{2}{x}$

* پ) $f(x)=3\sin^5(x^2+\sqrt{x})$

* ت) $f(x)=\sin^5 x\times\tan 3x$

ث) $f(x)=\tan^3 \frac{1}{x^2}$

ج) $f(x)=\sin(\cos\sqrt{x})$

چ) $f(x)=\cot\frac{\sqrt[3]{x-5}}{x^2-x}$

* ح) $f(x)=\cos^2\sqrt[3]{\frac{x-1}{x+2}}$

* خ) $f(x)=(\sin x+\sqrt{1-\tan^2 x})^2$

د) $f(x)=\sqrt[3]{(\frac{\sin x+1}{\sin x-1})^2}$

۶۸- اگر $f(x)=\sin x$ باشد، مقدار مشتق $\frac{fof}{f^2}$ را در $x=\frac{\pi}{2}$ بیابید. **(سراسری – ۸۲)**

۶۹- نمودار تابع $f(x)=1+2\cos 3x$ در چند نقطه مماسی موازی محور xها دارد؟ نقاط واقع در بازه‌ی $[0,\frac{2\pi}{3}]$ را بیابید.

۷۰- بیش‌ترین و کم‌ترین زاویه‌ی خطوط مماس بر منحنی $f(x)=\sin x$ را با جهت مثبت محور xها بیابید.

* ۷۱- بیش‌ترین وکم‌ترین زاویه‌ی خطوط مماس بر $y=\cot x$ را در صورت وجود با جهت مثبت محور xها بیابید.

۷۲- مقدار مشتق تابع $f(x)=|1-\cos^3 x|$ را در $x=\frac{\pi}{4}$ بیابید.

مشتق تابع وارون مثلثاتی

۷۳- ثابت کنید مشتق تابع $f(x)=\sin^{-1}2x$ از $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$ بر روی $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ برابر است با: $\frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}$

* ۷۴- ثابت کنید مشتق تابع معکوس $f(x)=\tan x$ از $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ بر روی $\mathbb{R}$ برابر است با: $\frac{1}{1+x^2}$

۷۵- مشتق بگیرید.

الف) $f(x)=\sin^{-1}(1+\cos x)$

* ب) $f(x)=\sqrt{\cos^{-1}(3x)}+\tan^2 5x$

پ) $f(x)=\dfrac{\sin^{-1}\sqrt{x^2-1}}{1+\cos^{-1}(\frac{5}{x})}$

* ت) $f(x)=x^2\sin^{-1}\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$

ث) $f(x)=\sin(\dfrac{x-2}{x^2}).\sin^{-1}(\dfrac{x-2}{x^2})$

* ج) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{\cos^{-1}(2x-1)+x^2}}$

* چ) $f(x)=\tan^{-1}(x+\frac{1}{x})$

* ح) $f(x)=\tan^{-1}(3x)+\cot^{-1}(3x)$

* خ) $f(x)=\dfrac{\tan^{-1}(x)}{\sin^{-1}(x)}$

د) $f(x)=\sqrt{1+\sqrt{\cos^{-1}(x^2)}}$

۷۶- خط مماس بر نمودار تابع $y+\frac{\pi}{4}=\tan^{-1}\sqrt{3x-5}$ در نقطه‌ای به طول ۲ واقع بر آن محور yها را با کدام عرض قطع می‌کند؟ **(سراسری – ۸۶)**

۷۷- دامنه و برد $f(x)=\cos^{-1}(\cos x)$ را تعیین کنید و نشان دهید این تابع متناوب است و نمودار آن را رسم کنید. این تابع در چه نقاطی مشتق‌ناپذیر است و مشتق آن را در بقیه‌ی نقاط تعیین کنید.

(مشابه تمرین کتاب درسی)

۷۸- تابع $f(x)=\sqrt{x^2-1}$ را در نظر بگیرید. اگر از هر نقطه روی تابع خطی به مبداء وصل کنیم و شیب آن را m بنامیم، تغییرات زاویه‌ی خط با محور xها (α) را نسبت به تغییرات x به دست آورید.

※ ۷۹- زاویه‌ی خط مماس بر منحنی $y=\sin^{-1}(x)$ در نقطه‌ای به طول $x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ واقع بر منحنی با محور oy را بیابید.

۸۰- اگر $f(x)=\frac{x-1}{x+1}$ باشد، مقدار $(f^{-1})'(2)$ را بیابید.

※ ۸۱- اگر $f(x)=x+\sqrt{x}$ و خط $4y+5x=a$ قائم بر نمودار تابع f^{-1} باشد، آن‌گاه a کدام است؟

۱) ۳۴ ۲) ۳۶ ۳) ۴۶ ۴) ۴۸ (سراسری – ۸۶)

۸۲- اگر $x>1$, $f(x)=x^3-2x$ و خط $10y=x+m$ مماس بر نمودار f^{-1} باشد، آن‌گاه m کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۴ ۳) ۱۶ ۴) ۱۸ (سراسری – ۸۹)

※ ۸۳- اگر $f(x)=x^3+x+1$ باشد، مقدار $(f^{-1})'(3)$ را بیابید.

بارم‌بندی حسابان در سال تحصیلی ۹۰ – ۸۹

فصل‌ها	نوبت اول	نوبت دوم و شهریور
اول	۱۰	۴
دوم	۱۰	۴
سوم	---	۳
چهارم	---	۴
پنجم	---	۵
جمع	۲۰	۲۰

دکتر هشترودی :

مسائل ، رگهایی هستند که به بدن ریاضیات خون می‌رسانند .

پاسخ فصل پنجم

مشتق توابع

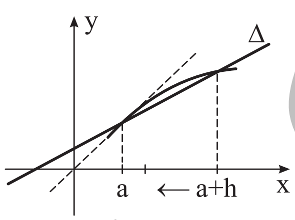
۱- $f(x)=\frac{۱}{\sqrt{x}} \Rightarrow f'(۴)=\lim\limits_{h\to ۰}\frac{f(۴+h)-f(۴)}{h}=\lim\limits_{h\to ۰}\frac{\frac{۱}{\sqrt{۴+h}}-\frac{۱}{\sqrt{۴}}}{h}=\lim\limits_{h\to ۰}\frac{\frac{۲-\sqrt{۴+h}}{۲\sqrt{۴+h}}}{h}$

$$=\lim_{h\to ۰}\frac{۲-\sqrt{۴+h}}{۲h\sqrt{۴+h}}\times \text{مزدوج صورت}=\lim_{h\to ۰}\frac{۴-(۴+h)}{۲h(\sqrt{۴+h})(۲+\sqrt{۴+h})}$$

$$=\lim_{h\to ۰}\frac{-\cancel{h}}{۲\cancel{h}\sqrt{۴+h}(۲+\sqrt{۴+h})}=\lim_{h\to ۰}\frac{-۱}{۲\sqrt{۴+h}(۲+\sqrt{۴+h})}$$

$$=\frac{-۱}{۲\times ۲\times ۴}=-\frac{۱}{۱۶}$$

۳-



$$m_{\Delta}=\lim_{h\to ۰}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{\sqrt{a+h}-\sqrt{a}}{h}$$

$$=\lim_{h\to ۰}\frac{\sqrt{a+h}-\sqrt{a}}{h}\times\frac{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}}{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}}$$

$$=\lim_{h\to ۰}\frac{(a+h)-a}{h(\sqrt{a+h}+\sqrt{a})}=\lim_{h\to ۰}\frac{۱}{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}}=\frac{۱}{۲\sqrt{a}}$$

۴-

$$m=f(x)=\frac{۱}{x^{۲}+۱}\Rightarrow f'(۱)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(۱+h)-f(۱)}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{\frac{۱}{(۱+h)^{۲}+۱}-\frac{۱}{۲}}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{\frac{۱-(۱+h)^{۲}}{۲((۱+h)^{۲}+۱)}}{h}$$

$$=\lim_{h\to ۰}\frac{۱-(۱+h^{۲}+۲h)}{۲h((۱+h)^{۲}+۱)}=\lim_{h\to ۰}\frac{h(-h-۲)}{۲h((۱+h)^{۲}+۱)}=\lim_{h\to ۰}\frac{-h-۲}{۲((۱+h)^{۲}+۱)}$$

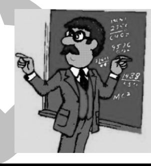
$$=\frac{-۲}{۴}=-\frac{۱}{۲}$$

معادله‌ی مماس : $y-y_{۰}=m(x-x_{۰})\Rightarrow y-\frac{۱}{(۱)^{۲}+۱}=-\frac{۱}{۲}(x-۱)\Rightarrow y-\frac{۱}{۲}=-\frac{۱}{۲}(x-۱)$

$$\Rightarrow y=-\frac{۱}{۲}x+۱$$

۶- $$\lim_{h\to ۰}\frac{f(x_۰+۲h)-f(x_۰-h)}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{\sqrt{x_۰+۲h}-\sqrt{x_۰-h}}{h}\times\frac{\sqrt{x_۰+۲h}+\sqrt{x_۰-h}}{\sqrt{x_۰+۲h}+\sqrt{x_۰-h}}$$
$$=\lim_{h\to ۰}\frac{(x_۰+۲h)-(x_۰-h)}{h(\sqrt{x_۰+۲h}+\sqrt{x_۰+h})}$$
$$=\lim_{h\to ۰}\frac{+۳h}{h(\sqrt{x_۰+۲h}+\sqrt{x_۰+h})}=\frac{+۳}{۲\sqrt{x_۰}}$$

نکته:



$$\lim_{h\to ۰}\frac{f(x_۰+mh)-f(x_۰+nh)}{h}=(m-n)f'(x_۰)$$

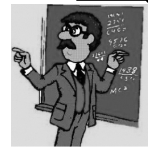
۷- $$\lim_{\Delta x\to ۰^+}\frac{f(۱-۲\Delta x)-f(۱)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to ۰^+}\frac{\frac{|(۱-۲\Delta x)-۱|+۱}{|۱-۲\Delta x|+۱}-\frac{۱}{۲}}{\Delta x}$$

با توجه به این‌که $\Delta x>۰$ است و $۱-۲\Delta x$ عددی مثبت می‌گردد. داریم:

$$=\lim_{\Delta x\to ۰^+}\frac{\frac{۲\Delta x+۱}{۲-۲\Delta x}-\frac{۱}{۲}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to ۰^+}\frac{\frac{۲\Delta x+۱-(۱-\Delta x)}{۲(۱-\Delta x)}}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to ۰^+}\frac{\frac{۳\Delta x}{۲(۱-\Delta x)}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to ۰}\frac{۳}{۲(۱-\Delta x)}=\frac{۳}{۲}$$

۸- $$h(x)=\frac{(x+۱)f(x)}{(۲x+۱)f(۲x+۱)}\Rightarrow h'(-۱)=\lim_{x\to -۱}\frac{h(x)-h(-۱)}{x-(-۱)}=\lim_{x\to -۱}\frac{\frac{(x+۱)f(x)}{(۲x+۱)f(۲x+۱)}-۰}{x+۱}$$
$$=\frac{f(x)}{(۲x+۱)f(۲x+۱)}=\frac{f(-۱)}{-f(-۱)}=-۱$$

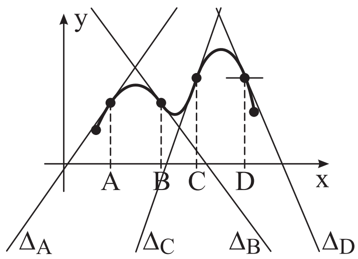
نکته:



برای مشتق گرفتن از تابع در نقطه‌ای که تابع را برابر صفر می‌کند، کافی است فقط از عامل صفرکننده مشتق بگیریم. به‌طور مثال در همین سوال:

$$h(-۱)=\frac{(x+۱)'f(x)}{(۲x+۱)f(۲x+۱)}=\frac{f(x)}{(۲x+۱)f(۲x+۱)}\overset{x=-۲}{=\!=}\frac{f(-۱)}{-f(-۱)}=-۱$$

۱۰- با توجه به شیب‌های خطوط مماس بر منحنی در نقاط داده‌شده می‌بینیم که شیب خطوط به ترتیب زیر مرتب شده‌اند.



$$\Delta_C > \Delta_A > \Delta_B > \Delta_D$$

پس با توجه به این‌که شیب خط مماس در هر نقطه، همان مشتق تابع است. پس:

$$f'_{(C)} > f'_{(A)} > f'_{(B)} > f'_{(D)}$$

۱۳-

$$f(x) = x\sqrt{x^۲ - ۴x + ۴} \Rightarrow f'_-(۲) = \lim_{x \to ۲^-} \frac{x\sqrt{x^۲ - ۴x + ۴} - ۰}{x - ۲} = \lim_{x \to ۲^-} \frac{x|x-۲|}{x-۲}$$

$$= \lim_{x \to ۲^-} \frac{-x(x-۲)}{x-۲} = \lim_{x \to ۲^-} -x = -۲$$

$$f'_+(۲) = \lim_{x \to ۲^+} \frac{x\sqrt{x^۲ - ۴x + ۴} - ۰}{x - ۲} = \lim_{x \to ۲^+} \frac{x|x-۲|}{x-۲}$$

$$= \lim_{x \to ۲^+} \frac{-x(x-۲)}{x-۲} = \lim_{x \to ۲^+} -x = +۲$$

تابع در $x = ۲$ مشتق‌پذیر نمی‌باشد.

۱۵-

$$f(x) = |\sin \pi x| \Rightarrow f'_-(۰) = \lim_{x \to ۰^-} \frac{|\sin \pi x| - ۰}{x - ۰}$$

با توجه به این‌که πx وقتی $x \to ۰^-$ می‌گردد، برابر ۰^- می‌شود.

در نتیجه زاویه در ربع چهارم قرار می‌گیرد پس سینوس منفی می‌گردد و داریم:

$$\lim_{x \to ۰^-} \frac{-\sin \pi x}{x} = \lim_{x \to ۰^-} = -\frac{\sin \pi x}{\pi x} \times \pi = -۱ \times \pi = -\pi$$

$$f'_+(۰) = \lim_{x \to ۰^+} \frac{|\sin \pi x| - ۰}{x - ۰}$$

با توجه به این‌که πx وقتی $x \to ۰^+$ می‌گردد، برابر ۰^+ می‌شود.

پس زاویه در ربع اول قرار می‌گیرد و سینوس مثبت می‌گردد.

$$\lim_{x \to ۰^+} \frac{\sin \pi x}{\pi x} \times \pi = ۱ \times \pi = \pi$$

تابع در $x = ۰$ مشتق‌پذیر نمی‌باشد.

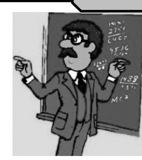
۱۸- $$f(x)=\sqrt{|x-۱|}\Rightarrow m=f'(۱)=\lim_{x\to ۱}\frac{\sqrt{|x-۱|}-۰}{x-۱}=\lim_{x\to ۱}\frac{\sqrt{|x-۱|}}{x-۱}\times\frac{\sqrt{|x-۱|}}{\sqrt{|x-۱|}}$$

$$=\lim_{x\to ۱}\frac{|x-۱|}{(x-۱)\sqrt{|x-۱|}}$$

$$=\begin{cases}\displaystyle\lim_{x\to ۱^+}\frac{|x-۱|}{(x-۱)\sqrt{|x-۱|}}=\lim_{x\to ۱^+}\frac{۱}{\sqrt{|x-۱|}}=\frac{۱}{۰^+}=+\infty\\ \displaystyle\lim_{x\to ۱^-}\frac{|x-۱|}{(x-۱)\sqrt{|x-۱|}}=\lim_{x\to ۱^-}\frac{-۱}{\sqrt{|x-۱|}}=\frac{-۱}{۰^+}=-\infty\end{cases}$$

بنابراین در این نقطه تابع مشتق‌پذیر نمی‌باشد. ولی چون شیب خط مماس بر منحنی به بی‌نهایت میل می‌کند، پس خط مماس نیز قائم می‌گردد و زاویه‌ی آن با محور طول‌ها برابر $\frac{\pi}{۲}$ می‌شود.

نکته:



به‌طور کلی توابع رادیکالی در ریشه‌هایشان مشتق‌پذیر نمی‌باشند و مماس در آن‌ها موازی محور عرض‌ها می‌گردد.

۱۹- با توجه به پیوستگی تابع در $x=۱$ داریم: $f(x)=x|x-۱|+a|x-۱|=|x-۱|(x+a)$

$$f'_-(۱)=\lim_{x\to ۱^-}\frac{f(x)-f(۱)}{x-۱}=\lim_{x\to ۱^-}\frac{|x-۱|(x+a)-۰}{x-۱}=\lim_{x\to ۱^-}\frac{-(x-۱)(x+a)}{x-۱}$$

$$=-(۱+a)=-۱-a$$

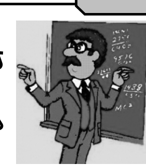
$$f'_+(۱)=\lim_{x\to ۱^+}\frac{f(x)-f(۱)}{x-۱}=\lim_{x\to ۱^+}\frac{|x-۱|(x+۵)-۰}{x-۱}=\lim_{x\to ۱^+}\frac{(x-۱)(x+a)}{x-۱}$$

$$=\lim_{x\to ۱^+}x+a=۱+a$$

با توجه به این‌که تابع در $x=۱$ مشتق‌پذیر است، باید $f'_-(۱)=f'_+(۱)$ باشد و داریم:

$$-۱-a=۱+a\Rightarrow ۲a=-۲\Rightarrow a=-۱$$

نکته:



تابع $f(x)=|x-۱|$ در $x=۱$ مشتق‌ناپذیر است ولی $g(x)=(x-۱)|x-۱|$ در $x=۱$ مشتق‌پذیر است. یعنی توابع قدر مطلقی در ریشه‌ی قدر مطلق مشتق‌ناپذیرند، مگر عامل صفرکننده‌ای کنار آن‌ها باشد.

بنابراین در این سوال که $f(x)=(x+a)|x-۱|$ است، باید $a=-۱$ باشد تا تابع در $x=۱$ مشتق‌پذیر گردد.

۲۰- با توجه به پیوستگی تابع در $x=۰$ داریم:

$$f'_{-}(۰)=\lim_{x\to ۰^-}\frac{f(x)-f(۰)}{x-۰}=\lim_{x\to ۰^-}\frac{-x+۱-۱}{x}=\lim_{x\to ۰^-}\frac{-x}{x}=-۱$$

$$f'_{+}(۰)=\lim_{x\to ۰^+}\frac{f(x)-f(۰)}{x-۰}=\lim_{x\to ۰^+}\frac{x+۱-۱}{x}=\lim_{x\to ۰^+}\frac{x}{x}=۱$$

۲۲- با توجه به پیوستگی تابع در $x=۰$ داریم:

$$f'_{-}(۰)=\lim_{x\to ۰^-}\frac{\sqrt{۱-\sqrt{۱-x^۲}}-۰}{x-۰}=\lim_{x\to ۰^-}\frac{\sqrt{۱-\sqrt{۱-x^۲}}}{x}\times\frac{\sqrt{۱+\sqrt{۱-x^۲}}}{\sqrt{۱+\sqrt{۱-x^۲}}}=\lim_{x\to ۰^-}\frac{\sqrt{۱-(۱-x^۲)}}{x\sqrt{۱+\sqrt{۱-x^۲}}}$$

$$=\lim_{x\to ۰^-}\frac{\sqrt{x^۲}}{x\sqrt{۱+\sqrt{۱-x^۲}}}=\lim_{x\to ۰^-}\frac{-x}{x\sqrt{۱+\sqrt{۱-x^۲}}}=\lim_{x\to ۰^-}\frac{-۱}{\sqrt{۱+\sqrt{۱-x^۲}}}=\frac{-۱}{\sqrt{۲}}=\frac{-\sqrt{۲}}{۲}$$

۲۳-

$$\lim_{K\to\infty}K\left(f\left(۱+\frac{۱}{K}\right)-f(۱)\right)\xrightarrow[\text{تغیر متغیر}]{\frac{۱}{K}=\Delta x}\lim_{\Delta x\to ۰}\frac{۱}{\Delta x}(f(۱+\Delta x)-f(۱))=\lim_{\Delta x\to ۰}\frac{f(۱+\Delta x)-f(۱)}{\Delta x}=f'(۱)$$

$f'(۱)$ همان شیب خط مماس می‌باشد که عبارت است از تغییرات y به تغییرات x . یعنی:

$$f'(۱)=m=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{۲}{۳}$$

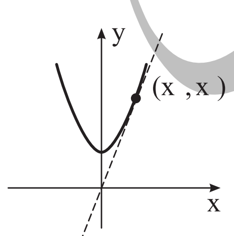
۲۴-

$$\begin{cases}y=۳x\\ y=x^۲-۳x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y'=۳\\ y'=۲x-۳\end{cases}\Rightarrow y'=y'\Rightarrow ۳=۲x-۳\Rightarrow ۲x=۶\Rightarrow x=۳$$

با جای‌گذاری $x=۳$ در $y=x^۲-۳x$ داریم:

$$y=(۳)^۲-۳(۳)=۰$$

۲۵- نقطه‌ی $(x_۰, x_۰^۲)$ را روی منحنی فرض می‌کنیم و معادله‌ی خط مماس در این نقطه را می‌نویسیم:



$$y-y_۰=f'(x_۰)(x-x_۰)\Rightarrow y-(x_۰^۲+۲)=۲x_۰(x-x_۰)$$

با توجه به این‌که این خط از مبداء مختصات می‌گذرد، پس به جای (x,y) نقطه‌ی $(۰,۰)$ را قرار می‌دهیم:

$$۰-(x_۰^۲+۲)=۲x_۰(۰-x_۰)\Rightarrow -x_۰^۲-۲=-۲x_۰^۲\Rightarrow x_۰^۲=۲\Rightarrow x_۰=\pm\sqrt{۲}$$

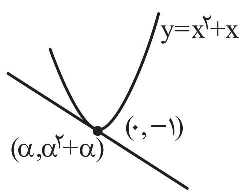
پس نقطه‌ای که مماس در آن از مبداء می‌گذرد $(\pm\sqrt{۲},۴)$ می‌باشد.

۲۶- به‌طورکلی برای حل این‌گونه سوالات نقطه‌ی $(\alpha ,f(\alpha))$ را نقطه‌ی تلاقی خط مماس با منحنی در نظر می‌گیریم و معادله‌ی مماس را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$y-f(\alpha)=f'(\alpha)(x-\alpha)$$

سپس نقطه‌ی داده‌شده را به جای x و y قرار می‌دهیم تا یک معادله برحسب α پیدا شود و با حل آن مقدار α را می‌یابیم.

$$y-(\alpha^۲+\alpha)=(۲\alpha+۱)(x-\alpha)\xrightarrow{(\circ,-۱)}-۱-\alpha^۲-\alpha=(۲\alpha+۱)(\circ-\alpha)$$



$$\Rightarrow -۱-\alpha^۲-\alpha=-۲\alpha^۲-\alpha$$

$$\Rightarrow \alpha^۲-۱=\circ\Rightarrow \alpha=\pm ۱$$

$$\Rightarrow \begin{cases}(\alpha,\alpha^۲+\alpha)=(-۱,\circ)\\(\alpha,\alpha^۲+\alpha)=(۱,۲)\end{cases}$$

۲۸- چون f در $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است. پس روی $\mathbb{R}$ پیوسته نیز خواهد بود. بنابراین g نیز روی $\mathbb{R}$ پیوسته می‌گردد.

$$g'(x)=\lim_{x\to x_\circ}\frac{g(x)-g(x_\circ)}{x-x_\circ}=\lim_{x\to x_\circ}\frac{(f(ax+b)+c)-(f(ax_\circ+b)+c)}{x-x_\circ}$$

$$=\lim_{x\to x_\circ}\frac{f(ax+b)-f(ax_\circ+b)}{x-x_\circ}=\lim_{x\to x_\circ}\frac{a(f(ax+b)-f(ax_\circ+b))}{ax-ax_\circ}$$

$$=\lim_{x\to x_\circ}\frac{a(f(ax+b)-f(ax_\circ+b))}{(ax+b)-(ax_\circ+b)}=a\times f'(ax_\circ+b)$$

پس تابع g نیز مشتق‌پذیر بوده و مشتق آن برابر $af'(ax_\circ+b)$ می‌گردد.

۳۰- به‌طور کلی داریم:

$$[f(u)]'=u'f'(u)$$

$$[f(\frac{۱}{\sqrt{x}})]'=(\frac{۱}{\sqrt{x}})'f'(\frac{۱}{\sqrt{x}})=\frac{\circ-\frac{۱}{۲\sqrt{x}}}{x}f'(\frac{۱}{\sqrt{x}})\xlongequal{x=\frac{۱}{۴}}-۴f'(۲)=-۴\times\frac{(۲)^۲-۱}{\sqrt{۵+(۲)^۲}}=-۴\frac{۳}{۳}=-۴$$

۳۲-

$$\lim_{h\to\circ}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{۱}{\sqrt{۱+x^۲}}\Rightarrow f'(x)=\frac{۱}{\sqrt{۱+x^۲}}$$

$$[f(\tan x)]'=(۱+\tan^۲x).f'(\tan x)=(۱+\tan^۲x)\times\frac{۱}{\sqrt{۱+\tan^۲x}}=\sqrt{۱+\tan^۲x}$$

$$=\sqrt{\frac{۱}{\cos^۲x}}=\left|\frac{۱}{\cos x}\right|$$

-۳۳

$$f(x^{۲}-g(x))=g(۳x)\Rightarrow(۲x-g'(x))f'(x^{۲}-g(x))=۳g'(۳x)$$

$$\xrightarrow{x=۰}(۰-g'(۰))f'(۰-g(۰))=۳g'(۰)\Rightarrow(۰-\frac{۱}{۲})f'(-۱)=۳\times\frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow f'(-۱)=-۳$$

-۳۴

ت) $f(x)=\sqrt[۳]{۵x-۳}=(۵x-۳)^{\frac{۱}{۳}}\Rightarrow f'(x)=\frac{۱}{۳}(۵x-۳)^{-\frac{۲}{۳}}\times(۵)=\frac{۵}{۳\sqrt[۳]{(۵x-۳)^{۲}}}$

ث) $f(x)=\frac{۱}{\sqrt[۶]{۵x-۳}}=(۵x-۳)^{-\frac{۱}{۶}}\Rightarrow f'(x)=-\frac{۱}{۶}(۵x-۳)^{-\frac{۷}{۶}}\times(۵)$

ح) $f(x)=(\frac{\sqrt{x^{۲}-۱}}{۳-x})^{۴}\Rightarrow f'(x)=۴(\frac{\sqrt{x^{۲}-۱}}{۳-x})^{۳}\times\frac{\frac{۲x}{۲\sqrt{x^{۲}-۱}}(۳-x)-(-۱)\sqrt{x^{۲}-۱}}{(۳-x)^{۲}}$

ذ) $f(x)=\sqrt{x^{۲}+\sqrt{۱-x^{۲}}}\Rightarrow f'(x)=\frac{۲x+\frac{-۲x}{۲\sqrt{۱-x^{۲}}}}{۲\sqrt{x^{۲}+\sqrt{۱-x^{۲}}}}$

ر) $f(x)=(\sqrt{۱+\sqrt{۱+\sqrt{۱-x^{۲}}}})^{۳}\Rightarrow f'(x)=۳(\sqrt{۱+\sqrt{۱+\sqrt{۱-x^{۲}}}})^{۲}\times\frac{۰+\frac{۰+\frac{-۲x}{۲\sqrt{۱-x^{۲}}}}{۲\sqrt{۱+\sqrt{۱-x^{۲}}}}}{۲\sqrt{۱+\sqrt{۱+\sqrt{۱-x^{۲}}}}}$

-۳۵

$$y=(\frac{۱۶}{x}-\sqrt[۳]{x^{۲}})^{۲}=(\frac{۱۶}{x}-x^{\frac{۲}{۳}})^{۲}\Rightarrow y'=۲(\frac{۱۶}{x}-x^{\frac{۲}{۳}})(\frac{-۱۶}{x^{۲}}-\frac{۲}{۳}x^{-\frac{۱}{۳}})$$

$$\xRightarrow{x\to-۸}y'=۲(\frac{۱۶}{-۸}-(-۸)^{\frac{۲}{۳}})(\frac{-۱۶}{۶۴}-\frac{۲}{۳}(-۸)^{\frac{-۱}{۳}})$$

$$=۲(-۲-۴)(-\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۳})=-\frac{۱۲}{۱۲}=-۱$$

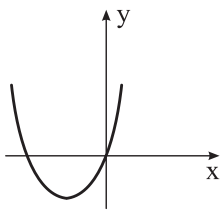
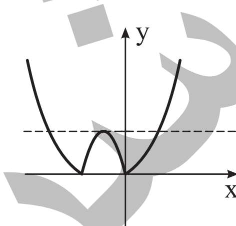
-۳۸

$$y=\frac{x^۲+ax+۱}{x^۲+x+۳}\Rightarrow y'=\frac{(۲x+a)(x^۲+x+۳)-(۲x+۱)(x^۲+ax+۱)}{(x^۲+x+۳)^۲}$$

$$=\frac{(۱-a)x^۲+۴x+(۳a-۱)}{(x^۲+x+۳)^۲}=\circ\Rightarrow(۱-a)x^۲+۴x+(۳a-۱)=\circ$$

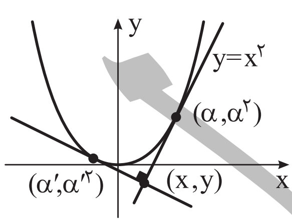
با توجه به این‌که معادله فقط باید یک ریشه داشته باشد و دلتای معادله‌ی آخر مخالف صفر است پس باید ضریب $x^۲$ صفر شود تا معادله بتواند یک ریشه داشته باشد پس $۱-a=\circ$ ، یعنی $a=۱$.

-۳۹

$y=x^۲+x$  $\Rightarrow y=|x^۲+x|$ 

خطوط افقی فقط در یک نقطه بر منحنی مماس می‌گردند و در روی محور طول‌ها به دلیل این‌که منحنی نوک تیز می‌گردد خط افقی بر منحنی مماس نمی‌گردد.

-۴۰ شیب معادله‌ی خط واصل نقطه‌ی $(\alpha,\alpha^۲)$ و (x,y) را می‌نویسیم:



$$m=\frac{\alpha^۲-y}{\alpha-x}$$

از طرفی می‌دانیم این شیب برابر است با مشتق تابع در α یعنی ۲α

پس داریم:

$$\frac{\alpha^۲-y}{\alpha-x}=۲\alpha\Rightarrow\alpha^۲-y=۲\alpha^۲-۲\alpha x\Rightarrow\alpha^۲-۲\alpha x+y=\circ$$

ریشه‌های این معادله حاوی α و α' می‌باشد.

از طرفی می‌دانیم $mm'=-۱$ یعنی $(۲\alpha)(۲\alpha')=-۱$ یعنی $\alpha\alpha'=-\frac{۱}{۴}$ که این همان ضرب ریشه‌ها یعنی $\frac{c}{a}$ معادله‌ی $\alpha^۲-۲\alpha x+y=\circ$ می‌باشد. پس:

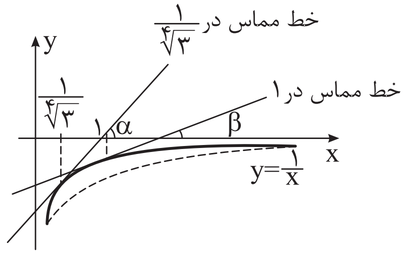
$$\frac{c}{a}=-\frac{۱}{۴}\Rightarrow\frac{y}{۱}=-\frac{۱}{۴}\Rightarrow y=-\frac{۱}{۴}$$

-۴۱

$$f(x)=-\frac{۱}{x}\Rightarrow f'(x)=\frac{۱}{x^{۲}}\Rightarrow\begin{cases}f'\left(\frac{۱}{\sqrt[۴]{۳}}\right)=\dfrac{۱}{\frac{۱}{(\sqrt[۴]{۳})^{۲}}}=\sqrt{۳}\\[2ex] f'(۱)=\dfrac{۱}{(۱)}=۱\end{cases}$$

بنابراین بیش‌ترین مقدار مشتق $\sqrt{۳}$ و کم‌ترین مقدار مشتق نیز برابر ۱ می‌باشد.

از آن‌جایی که مشتق در یک نقطه برابر شیب خط مماس و شیب خط مماس نیز tan زاویه‌ی خط با محور طول‌ها می‌باشد.



بنابراین داریم:

$$\begin{cases}\tan\beta=۱ \Rightarrow \beta=\dfrac{\pi}{۴}\\[2ex] \tan\alpha=\sqrt{۳}\Rightarrow \alpha=\dfrac{\pi}{۳}\end{cases}$$

پس:

$$|\alpha-\beta|=\frac{\pi}{۳}-\frac{\pi}{۴}=\frac{\pi}{۱۲}$$

-۴۲

$$f(x)=x^{\frac{m}{n}}\Rightarrow f(x)=\sqrt[n]{x^m}\Rightarrow (f(x))^n=x^m\Rightarrow nf'(x).(f(x))^{n-۱}=mx^{m-۱}$$

$$f'(x)=\frac{mx^{m-۱}}{n(f(x))^{n-۱}}=\frac{mx^{m-۱}}{n(x^{\frac{m}{n}})^{n-۱}}=\frac{m}{n}\frac{x^{m-۱}}{x^{\frac{mn-m}{n}}}=\frac{m}{n}x^{m-۱-\frac{mn-m}{n}}=\frac{m}{n}x^{\frac{mn-n-mn+m}{n}}$$

$$=\frac{m}{n}x^{\frac{m-n}{n}}=\frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-۱}$$

-۴۳

$$f'_-(۰)=\lim_{x\to ۰^-}\frac{f(x)-f(۰)}{x-۰}\lim_{x\to ۰^-}\frac{\frac{|x|}{\sqrt[۳]{x}}-۰}{x-۰}=\lim_{x\to ۰^-}\frac{\frac{-x}{\sqrt[۳]{x}}}{x}=\lim_{x\to ۰^-}\frac{-۱}{\sqrt[۳]{x}}=+\infty$$

$$f'_+(۰)=\lim_{x\to ۰^+}\frac{f(x)-f(۰)}{x-۰}\lim_{x\to ۰^+}\frac{\frac{x}{\sqrt[۳]{x}}-۰}{x}=\lim_{x\to ۰^+}\frac{۱}{\sqrt[۳]{x}}=+\infty$$

بنابراین هم مشتق چپ و هم مشتق راست تابع در $x=۰$ برابر $+\infty$ می‌باشد. بنابراین، مماس خطی قائم است که به صورت  می‌باشد.

۴۵- $f(x)=\sqrt{۱-\sqrt{\cos ax}}$

$$f'(۰)=\lim_{x\to ۰}\frac{f(x)-f(۰)}{x-۰}=\lim_{x\to ۰}\frac{\sqrt{۱-\sqrt{\cos ax}}-۰}{x}\times\frac{\sqrt{۱+\sqrt{\cos ax}}}{\sqrt{۱+\sqrt{\cos ax}}}=\lim_{x\to ۰}\frac{\sqrt{۱-\cos ax}}{x\sqrt{۱+\sqrt{\cos ax}}}$$

$$=\lim_{x\to ۰}\frac{\sqrt{۱-\cos ax}}{x\sqrt{۱+\sqrt{\cos ax}}}\times\frac{\sqrt{۱+\cos ax}}{\sqrt{۱+\cos ax}}==\lim_{x\to ۰}\frac{\sqrt{۱-\cos^۲ ax}}{x(\sqrt{۱+\sqrt{\cos ax}})(\sqrt{۱+\cos ax})}$$

$$=\lim_{x\to ۰}\frac{|\sin ax|}{x(\sqrt{۱+\sqrt{\cos ax}})(\sqrt{۱+\cos ax})}\begin{cases} ۰^+ & \lim\dfrac{\sin ax}{x\sqrt{۱+\sqrt{\cos ax}}\ \sqrt{۱+\cos ax}}=\dfrac{a}{۲} \\ ۰^- & \lim\dfrac{-\sin ax}{x\sqrt{۱+\sqrt{\cos ax}}\ \sqrt{۱+\cos ax}}=\dfrac{-a}{۲}\end{cases}$$

زاویه‌ی بین دو خط با شیب‌های m و m' عبارت است از: $\tan\alpha=\left|\dfrac{m-m'}{۱+mm'}\right|$

پس برای شیب‌های $\frac{a}{۲}$ و $-\frac{a}{۲}$ داریم:

$$\tan\alpha=\left|\frac{\frac{a}{۲}-(-\frac{a}{۲})}{۱+\frac{a}{۲}(-\frac{a}{۲})}\right|\Rightarrow\frac{۴}{۳}=\left|\frac{a}{۱-\frac{a^۲}{۴}}\right|\Rightarrow ۳|a|=|۴-a^۲|$$

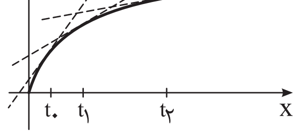
$$\Rightarrow\begin{cases}۴-a^۲=۳a\Rightarrow a^۲+۳a-۴=۰\Rightarrow\begin{cases}a=۱\\a=-۴\end{cases}\\ ۴-a^۲=-۳a\Rightarrow a^۲-۳a-۴=۰\Rightarrow\begin{cases}a=-۱\\a=۴\end{cases}\end{cases}\Rightarrow$$ ۴ مقدار برای a وجود دارد.

۴۶- $$f'(x_۰)=\lim_{\Delta x\to ۰}\frac{f(x_۰+\Delta x)-f(x_۰)}{\Delta x}=\frac{f(x_۰)f(\Delta x)-f(x_۰)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to ۰}\frac{f(x_۰)(f(\Delta x)-۱)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to ۰}\frac{f(x)(۱+\Delta x g(\Delta x)-۱)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to ۰}f(x_۰)g(\Delta x)=f(x_۰)\times\lim_{\Delta x\to ۰}g(\Delta x)$$

$$=f(x_۰)\times ۱=f(x_۰)$$

۴۸- با رسم مماس بر منحنی تابع و مقایسه‌ی شیب آن‌ها متوجه می‌شویم که شیب خطوط مماس بر منحنی در حال کاهش می‌باشد. یعنی سرعت افزایش مقاومت بتن با گذشت زمان کاهش می‌یابد.



۴۹- با توجه به این‌که با افزایش ارتفاع در خمره ابتدا حجم ظرف افزایش می‌یابد پس سرعت افزایش ارتفاع کاهش می‌یابد تا به بزرگ‌ترین شعاع مقطع خمره برسد. سپس با کم شدن مجدد حجم خمره سرعت افزایش ارتفاع بیش‌تر شده و h با سرعت بیش‌تری افزایش می‌یابد. بنابراین گزینه‌ی « ب » صحیح است.

۵۰- $$\begin{cases} S = x^{۲} \\ P = ۴x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S = x^{۲} \\ x = \frac{P}{۴} \end{cases} \Rightarrow S = (\frac{P}{۴})^{۲} \Rightarrow S' = ۲(\frac{P}{۱۶}) = \frac{P}{۸} = \frac{۴x}{۸} = \frac{x}{۲} = \frac{۲}{۲} = ۱$$

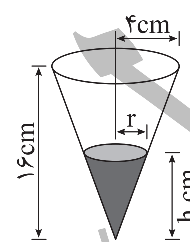
۵۳- الف) $$V = \frac{۴}{۳}\pi r^{۳} \Rightarrow V'_t = ۴\pi r^{۲} r'_t \Rightarrow ۶ = ۴\pi r^{۲} r'_t \Rightarrow r'_t = \frac{۶}{۴\pi r^{۲}}$$

ب) $$S = ۴\pi r^{۲} \Rightarrow S'_t = ۸\pi r r'_t \Rightarrow S'_t = ۸\pi r \times \frac{۶}{۴\pi r^{۲}} = \frac{۱۲}{r}$$

پ) $$S = ۴\pi r^{۲} \Rightarrow r = \sqrt{\frac{S}{۴\pi}} \Rightarrow r' = \frac{\frac{S'}{۴\pi}}{۲\sqrt{\frac{S}{۴\pi}}}$$

ت) $$V = \frac{۴}{۳}\pi r^{۳} \Rightarrow \frac{۳۲۰۰۰}{۳}\pi = \frac{۴}{۳}\pi r^{۳} \Rightarrow r^{۳} = ۸۰۰۰ \Rightarrow r = ۲۰ \Rightarrow S'_r = ۸\pi r = ۸\pi(۲۰) = ۱۶۰\pi$$

۵۵-



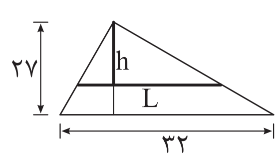
$$\frac{h}{۱۶} = \frac{r}{۴} \Rightarrow r = \frac{h}{۴}$$

$$V = \frac{۱}{۳}\pi r^{۲} h = \frac{۱}{۳}\pi(\frac{h}{۴})^{۲} h = \frac{\pi h^{۳}}{۴۸}$$

$$V'_t = \frac{۳\pi h^{۲} h'_t}{۴۸} \Rightarrow -۲ = \frac{۳\pi (۸)^{۲} h'_t}{۴۸}$$

$$h'_t = \frac{-۲}{۴\pi} = \frac{-۱}{۲\pi} cm$$

۵۷-

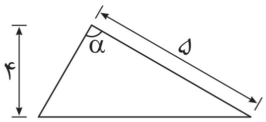


$$\frac{h}{۲۷} = \frac{L}{۳۲} \Rightarrow L = \frac{۸}{۷}h$$

$$S = \frac{۱}{۲}Lh = \frac{۱}{۲}(\frac{۸}{۷}h)h = \frac{۴}{۷}h^{۲}$$

$$S'_t = \frac{۸}{۷}h h'_t \Rightarrow S'_t = \frac{۸}{۷}(۷)(-۰/۰۲) = -۰/۱۶$$

۵۹- الف) $S=\frac{۱}{۲}۵\times۴\times\sin\alpha \Rightarrow S=۱۰\sin\alpha \Rightarrow S'_{\alpha}=۱۰\cos\alpha$

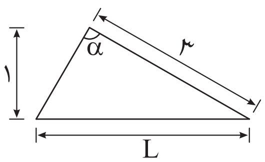


ب) $S'_{\alpha}=۱۰\cos\alpha<۰ \Rightarrow \cos\alpha<۰ \rightarrow ۹۰^\circ<\alpha<۱۸۰^\circ$

پ) $S'_{\alpha}=۱۰\cos\alpha>۰ \Rightarrow \cos\alpha>۰ \rightarrow ۰<\alpha<۹۰^\circ$

ت) $S'_{t}=۱۰\cos\alpha=۰ \Rightarrow \cos\alpha=۰ \rightarrow \alpha=۹۰^\circ$

۶۰- $L^۲=۱^۲+۳^۲-۲(۱)(۳)\cos\alpha \Rightarrow L^۲=۱۰-۶\cos\alpha$



$$\Rightarrow\begin{cases} L=\sqrt{۱۰-۶\cos\alpha} \\ \cos\alpha=\dfrac{۱۰-L^۲}{۶}\end{cases}$$

الف) $L'_{\alpha}=\dfrac{+۶\sin\alpha}{\sqrt{۱۰-۶\cos\alpha}}$

علامت مثبت به این معنی است که با افزایش α مقدار L نیز افزایش می‌یابد.

ب) $-\alpha'_{L}\times\sin\alpha=-۲L \Rightarrow \alpha'_{L}=\dfrac{+۲L}{\sin\alpha}=\dfrac{+۲L}{\sqrt{۱-\cos^۲\alpha}}=\dfrac{+۲L}{\sqrt{۱-(\frac{۱۰-L^۲}{۶})^۲}}$

علامت مثبت به این معنی است که با افزایش L مقدار α نیز افزایش می‌یابد.

۶۱- $y'=\dfrac{(۲x+۱)(x^۲+x+۱)-(۲x+۱)(x^۲+x)}{(x^۲+x+۱)^۲}=\dfrac{۲x+۱}{(x^۲+x+۱)^۲}$

علامت مشتق به علامت $۲x+۱$ بستگی دارد. اگر $x>-\frac{۱}{۲}$ باشد، مثبت بوده و y' نیز مثبت می‌باشد و تابع صعود خواهد نمود و اگر $x<-\frac{۱}{۲}$ باشد، عبارت $۲x+۱$ منفی شده و باعث منفی‌شدن علامت y' می‌گردد که نشان از نزولی‌بودن تابع دارد.

به‌طور کلی به این توابع که در برخی نواحی از دامنه‌ی خود صعودی و در برخی جاهای دیگر نزولی‌اند، نه صعودی و نه نزولی می‌گویند.

۶۴-

$$f'(\frac{\pi}{۴})=\lim_{h\to۰}\frac{f(\frac{\pi}{۴}+h)-f(\frac{\pi}{۴})}{h}=\frac{\frac{۱}{\sin(\frac{\pi}{۴}+h)}-\frac{۱}{\sin\frac{\pi}{۴}}}{h}=\lim_{h\to۰}\frac{\frac{\sin(\frac{\pi}{۴})-\sin(\frac{\pi}{۴}+h)}{\sin\frac{\pi}{۴}.\sin(\frac{\pi}{۴}+h)}}{h}$$

$$=\frac{\sin(\frac{\pi}{۴})-\sin(\frac{\pi}{۴}+h)}{h.\sin\frac{\pi}{۴}.\sin(\frac{\pi}{۴}+h)}=\lim_{h\to ۰}\frac{-۲\times\sin\frac{\cancel{h}}{۲}\times\cos(\frac{\frac{\pi}{۲}+h}{۲})}{\cancel{h}.\frac{\sqrt{۲}}{۲}.\sin(\frac{\pi}{۴}+h)}=\lim_{h\to ۰}\frac{-\cos(\frac{\pi}{۴}+\frac{h}{۲})}{\frac{\sqrt{۲}}{۲}\sin(\frac{\pi}{۴}+h)}$$

$$=\frac{\frac{-\sqrt{۲}}{۲}}{\frac{\sqrt{۲}}{۲}.\frac{\sqrt{۲}}{۲}}=-\sqrt{۲}$$

۶۶- $$f(x)=\sqrt{\tan x}\Rightarrow f'(x_۰)=\lim_{x\to x_۰}\frac{f(x)-f(x_۰)}{x-x_۰}=\lim_{x\to x_۰}\frac{\sqrt{\tan x}-\sqrt{\tan x_۰}}{x-x_۰}\times \text{مزدوج}$$

$$=\lim_{x\to x_۰}\frac{\tan x-\tan x_۰}{(x-x_۰)(\sqrt{\tan x}+\sqrt{\tan x_۰})}$$

$$=\lim_{x\to x_۰}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}-\frac{\sin x_۰}{\cos x_۰}}{(x-x_۰)(\sqrt{\tan x}+\sqrt{\tan x_۰})}$$

$$=\lim_{x\to x_۰}\frac{\frac{\sin x\cos x_۰-\cos x\sin x_۰}{\cos x\cos x_۰}}{(x-x_۰)(\sqrt{\tan x}+\sqrt{\tan x_۰})}$$

$$=\lim_{x\to x_۰}\frac{\frac{\cancel{\sin(x-x_۰)}}{\cos x\cos x_۰}}{\cancel{(x-x_۰)}(\sqrt{\tan x}+\sqrt{\tan x_۰})}$$

$$=\lim_{x\to x_۰}\frac{\frac{۱}{\cos x\cos x_۰}}{\sqrt{\tan x}+\sqrt{\tan x_۰}}=\frac{\frac{۱}{\cos^۲ x_۰}}{۲\sqrt{\tan x_۰}}=\frac{۱+\tan^۲ x_۰}{۲\sqrt{\tan x_۰}}$$

۶۷-

ث) $f(x)=\tan^۳\frac{۱}{x^۲}\Rightarrow f'(x)=۳\frac{۰-۲x}{x^۴}\tan^۲\frac{۱}{x^۲}(۱+\tan^۲\frac{۱}{x^۲})$

ج) $f(x)=\sin(\cos\sqrt{x})\Rightarrow f'(x)=-\frac{۱}{۲\sqrt{x}}\times\sin\sqrt{x}\times\cos(\cos\sqrt{x})$

چ) $f(x)=\cot\frac{\sqrt[۳]{x-۵}}{x^۲-x}\Rightarrow f'(x)=-(\frac{\sqrt[۳]{x-۵}}{x^۲-x})'(۱+\cot^۲\frac{\sqrt[۳]{x-۵}}{x^۲-x})$

$$=-\frac{\frac{۱}{۳\sqrt[۳]{(x-۵)^۲}}(x^۲-x)-(۲x-۱)\sqrt[۳]{(x-۵)}}{(x^۲-x)^۲}(۱+\cot^۲\frac{\sqrt[۳]{(x-۵)}}{x^۲-x})$$

د) $f(x)=\sqrt[3]{(\frac{\sin x+1}{\sin x-1})^2} \Rightarrow f(x)=(\frac{\sin x+1}{\sin x-1})^{\frac{2}{3}}$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{2}{3}(\frac{\cos x(\sin x-1)-\cos x(\sin x+1)}{(\sin x-1)^2})(\frac{\sin x+1}{\sin x-1})^{-\frac{1}{3}}$$

۶۸- $f(x)=\sin x \Rightarrow y=\frac{fof}{f^2}(x)=\frac{\sin(\sin x)}{\sin^2 x}$

$$y'=\frac{\cos x\cos(\sin x).\sin^2 x-(2\sin x\cos x)\sin x(\sin x)}{\sin^4 x}\overset{x=\frac{\pi}{2}}{=\!=\!=}0$$

۶۹- $f(x)=1+2\cos 3x \Rightarrow f'(x)=0 \Rightarrow -2\times 3\sin 3x=0 \Rightarrow \sin 3x=0$

$$\Rightarrow 3x=k\pi \Rightarrow x=\frac{k\pi}{3} \Rightarrow \begin{cases} k=0 \Rightarrow x=0 \\ k=1 \Rightarrow x=\frac{\pi}{3} \\ k=2 \Rightarrow x=\frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

۷۰- $f(x)=\sin x \Rightarrow$ شیب مماس $=f'(x)=\cos x$

بیش‌ترین مقدار شیب برابر ۱ و کم‌ترین مقدار آن برابر ۱− می‌گردد؛ که شیب ۱ برابر $\tan\frac{\pi}{4}$ و شیب ۱− برابر $\tan(-\frac{\pi}{4})$ می‌باشد. لذا بیش‌ترین زاویه‌ی خطوط مماس $\frac{\pi}{4}$ و کم‌ترین زاویه‌ی خطوط مماس با محور طول‌ها $-\frac{\pi}{4}$ است.

۷۲- در اطراف $x=\frac{\pi}{4}$ مقدار $1-\cos^3 x$ عبارتی مثبت است؛ پس نیازی به قدر مطلق ندارد و داریم:

$$f(x)=|1-\cos^3 x|=1-\cos^3 x \Rightarrow f'(x)=3\cos^2 x\sin x \xrightarrow{x=\frac{\pi}{4}} f'(\frac{\pi}{4})=3\cos^2\frac{\pi}{4}.\sin\frac{\pi}{4}$$

$$=3(\frac{\sqrt{2}}{2})^2(\frac{\sqrt{2}}{2})=\frac{3\sqrt{2}}{4}$$

۷۳- $f(x)=\sin^{-1}2x \Rightarrow y=\sin^{-1}2x \Rightarrow \sin y=2x$

$$\Rightarrow y'\cos y=2 \Rightarrow y'=\frac{2}{\cos y}=\frac{2}{\sqrt{1-\sin^2 y}}=\frac{2}{\sqrt{1-(2x)^2}}=\frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}$$

۷۵-

الف) $f(x)=\sin^{-1}(1+\cos x)\Rightarrow f'(x)=\dfrac{-\sin x}{\sqrt{1-(1+\cos x)^{2}}}$

پ) $f(x)=\dfrac{\sin^{-1}\sqrt{x^{2}-1}}{1+\cos^{-1}(\frac{5}{x})}$

$$f'(x)=\frac{\dfrac{\frac{2x}{2\sqrt{x^{2}-1}}}{\sqrt{1-(\sqrt{x^{2}-1})^{2}}}(1+\cos^{-1}(\frac{5}{x}))-\dfrac{-(-\frac{5}{x^{2}})}{\sqrt{1-(\frac{5}{x})^{2}}}\sin^{-1}\sqrt{x^{2}-1}}{(1+\cos^{-1}(\frac{5}{x}))^{2}}$$

ث) $f(x)=\sin(\dfrac{x-2}{x^{2}}).\sin^{-1}\dfrac{x-2}{x^{2}}$

$$f'(x)=\frac{x^{2}-2x(x-2)}{x^{4}}\cos\frac{x-2}{x^{2}}\times\sin^{-1}(\frac{x-2}{x^{2}})+\frac{\frac{x^{2}-2x(x-2)}{x^{4}}}{\sqrt{1-(\frac{x-2}{x^{2}})^{2}}}\sin(\frac{x-2}{x^{2}})$$

د) $f(x)=\sqrt{1+\sqrt{\operatorname{cox}^{-1}x^{2}}}\Rightarrow f'(x)=\dfrac{\dfrac{\frac{2x}{\sqrt{1-x^{2}}}}{2\sqrt{\cos^{-1}(x^{2})}}}{2\sqrt{1+\sqrt{\cos^{-1}(x^{2})}}}$

۷۶- $y+\dfrac{\pi}{4}=\tan^{-1}\sqrt{3x-5}\Rightarrow y+\dfrac{\pi}{4}=\tan^{-1}\sqrt{3(2)-5}\Rightarrow y+\dfrac{\pi}{4}=\tan^{-1}_{(1)}\Rightarrow y+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{4}\Rightarrow y=0$

$$y'=\frac{\frac{3}{2\sqrt{3x-5}}}{1+(\sqrt{3x-5})^{2}}=\frac{3}{2\sqrt{3x-5}(3x-4)}\xrightarrow{x=2}y'=\frac{3}{4}$$

خط مماس : $y-y_{0}=m(x-x_{0})\Rightarrow y-0=\dfrac{3}{4}(x-2)$

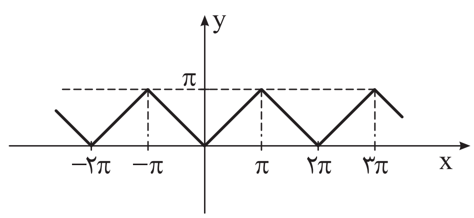
تلاقی با محور عرض:

$x=0\Rightarrow y=-\dfrac{3}{4}(0-2)=\dfrac{3}{2}$

۷۷- $f(x)=\cos^{-1}(\cos x)$

دامنه $D_f:\mathbb{R}$

برد $R_f:[0,\pi]$



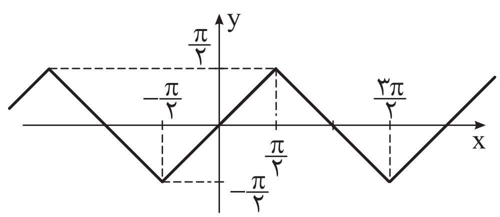
و از آن‌جایی که $\cos^{-1}(\cos(x+2\pi))=\cos^{-1}(\cos x)$ می‌باشد، پس تابع متناوب بوده و دوره‌ی تناوب آن 2π است.

$$f'(x)=-\frac{-\sin x}{\sqrt{1-\cos^2 x}}=\frac{\sin x}{|\sin x|}$$

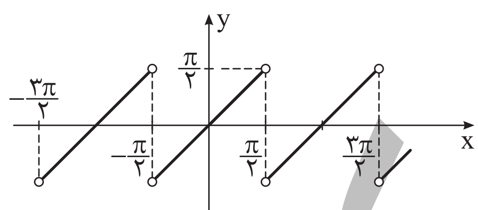
و تابع در $x=k\pi$ مشتق‌پذیر نمی‌باشد.

دیگر نمودارهای این توابع:

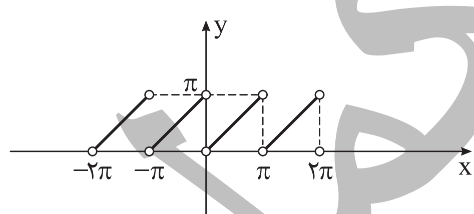
$f(x)=\sin^{-1}(\sin x)$



$f(x)=\tan^{-1}(\tan x)$

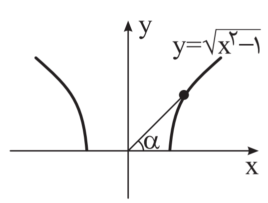


$f(x)=\cot^{-1}(\cot x)$



۷۸-

$$\tan\alpha=\frac{y}{x}=\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\Rightarrow \alpha'(1+\tan^2\alpha)=\frac{\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}+\sqrt{x^2-1}}{x^2}\Rightarrow \alpha'=\frac{\frac{2x^2-1}{\sqrt{x^2-1}}}{x^2\left(1+\left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\right)^2\right)}$$



$$=\frac{\frac{2x^2-1}{\sqrt{x^2-1}}}{x^2\left(\frac{2x^2-1}{x^2}\right)}=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

-۸۰

$$۲=\frac{x-۱}{x+۱}\Rightarrow x-۱=۲x+۲\Rightarrow x=-۳$$

$$(f^{-۱})'(۲)=\frac{۱}{f'(-۳)}=\frac{۱}{\frac{۲}{(x+۱)^۲}}=\frac{۱}{\frac{۲}{(-۳+۱)^۲}}=۲$$

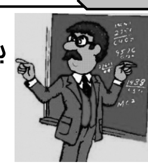
۸۲- شیب خط مماس بر منحنی $f^{-۱}$ در نقطه‌ی نظیر $(x,y)\in f$ روی $f^{-۱}$ برابر است با $\frac{۱}{۱۰}$ و داریم:

$$(f^{-۱})'(y)=\frac{۱}{f'(x)}\Rightarrow\frac{۱}{۱۰}=\frac{۱}{f'(x)}\Rightarrow f'(x)=۱۰$$

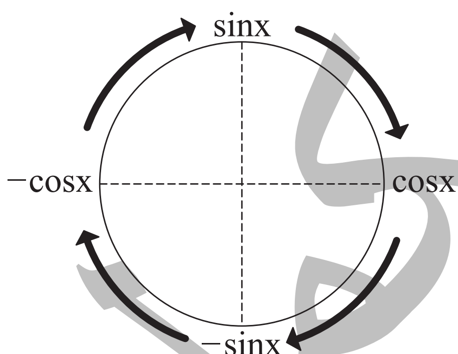
$$f'(x)=۱۰\Rightarrow ۳x^۲-۲=۱۰\Rightarrow x=۲\Rightarrow f(۲)=۲^۳-۲(۲)=۴$$

$$(۲,۴)\in f\Rightarrow(۴,۲)\in f^{-۱}\Rightarrow ۱۰y=x+m\Rightarrow ۱۰(۲)=۴+m\Rightarrow m=۱۶$$

نکته:



برای به خاطر سپردن مشتق توابع مثلثاتی این دایره را به خاطر بسپرید.



داوینچی :

هیچ دانشی را نمی‌توان واقعی دانست مگر این‌که

به صورت ریاضی نوشته شود .

سوالات امتحان هماهنگ درس: حسابان	**رشته‌ی:** ریاضی و فیزیک	**ساعت شروع:** ۸ صبح	مدت امتحان: **۱۵۰ دقیقه**
سال سوم آموزش متوسطه			تاریخ امتحان: **۸ / ۳ / ۱۳۹۰**
دانش‌آموزان و داوطلبان آزاد سراسر کشور در خردادماه سال ۱۳۹۰			**اداره‌ی کل سنجش و ارزشیابی تحصیلی**

ردیف	سوالات امتحان نهایی مرتبط با کتاب جدید درسی	نمره
۱	مقدار k را چنان بیابید که چند جمله‌ای $p(x)=2x^3-kx^2-x+3$ بر $x+1$ بخش‌پذیر باشد.	۰/۷۵
۲	توپی در اختیار داریم که از هر ارتفاعی که رها شود، پس از زمین خوردن به اندازه‌ی $\frac{1}{3}$ ارتفاع اولیه خود بالا می‌رود. فرض کنید این توپ را از زمین به هوا پرتاب کرده‌ایم تا به ارتفاع ۵ متری برسد. می‌خواهیم بدانیم پس ازشروع پرتاب تا زمان ایستادن، این توپ چه‌قدرمسافت طی می‌کند؟	۱/۲۵
۳	برای هر دو عدد حقیقی b و a ثابت کنید: $\|a+b\|\le\|a\|+\|b\|$	۰/۷۵
۴	نامعادله‌ی $\sqrt{x-1}\le\|x-1\|$ را با روش هندسی حل کنید.	۱/۲۵
۵	مساحت مثلث قائم‌الزاویه‌ای ۴ سانتی‌مترمربع است. طول وتر این مثلث را به عنوان تابعی از یک ضلع آن (x) به دست آورید.	۱
۶	اگر $g(x)=\frac{1}{x-3}$ و $f(x)=3x-2$ باشد، آن‌گاه حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید. الف) $(3f+2g)_{(4)}$ ب) D_{fog}	۱/۷۵
۷	تابع $f(x)=\begin{cases}x+1 & x<-2\\ 1 & -2<x<1\\ -2x & x>1\end{cases}$ را رسم کنید و بازه‌هایی که در آن‌ها تابع صعودی، نزولی یا ثابت است را مشخص کنید.	۱/۲۵
۸	درستی اتحاد $\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})=\sin x+\cos x$ را ثابت کنید.	۱/۲۵
۹	در مثلثی که طول اضلاع آن ۱ ، ۳ و $\sqrt{7}$ باشد، زاویه‌ی روبه‌روی ضلع به طول $\sqrt{7}$ چه‌قدر است؟	۰/۷۵
۱۰	مقدار $\cos^{-1}(\sin\frac{\pi}{8})$ را حساب کنید.	۱
۱۱	نمودار تابعی را رسم کنید که تابع در یک همسایگی ۳ تعریف شده باشد و در این نقطه حد داشته باشد، ولی حد آن غیر از مقدار تابع در ۳ باشد.	۱
۱۲	حد توابع زیر را محاسبه کنید. الف) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x^2}$ ب) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-8}{3x^2-12}$	۱/۷۵
۱۳	پیوستگی تابع $f(x)=\sqrt{x-4}$ را در نقطه‌ی $x=4$ بررسی کنید.	۱/۲۵

سوالات امتحان هماهنگ درس: حسابان	**رشته‌ی:** ریاضی و فیزیک	**ساعت شروع:** ۰۸:۰۰	مدت امتحان: **۱۵۰ دقیقه**
سال سوم آموزش متوسطه			تاریخ امتحان: **۱۳۹۰ / ۳ / ۸**
دانش‌آموزان و داوطلبان آزاد سراسر کشور در **خرداد ماه** سال **۱۳۹۰**			مرکز سنجش آموزش و پرورش

ردیف	سوالات	نمره
۱۴	اگر f تابعی باشد که در یک همسایگی نقطه‌ی a تعریف شده باشد و ناصفر باشد و f در a مشتق‌پذیر باشد و $f'(a) \neq 0$. با استفاده از تعریف نشان دهید که $\frac{1}{f}$ نیز در a مشتق‌پذیر است و $(\frac{1}{f})'(a) = -\frac{f'(a)}{f^2(a)}$.	۱/۵
۱۵	مشتق بگیرید: (ساده کردن الزامی نیست.) الف) $f(x) = \frac{(3x^2 - 1)^3}{x+1}$ ب) $g(x) = \sqrt{1 - 2\cos 3x}$ ج) $k(x) = 2\tan^{-1} x + 3\sin^{-1} x + \frac{4}{x}$	۲/۲۵
۱۶	آهنگ تغییرات مساحت یک مربع را نسبت به محیط آن برای مربعی که محیط آن ۱۶ واحد است به‌دست آورید.	۱/۲۵
	جمع نمرات	۲۰

✓ پاسخ سوالات امتحان هماهنگ

-۱

$$p(-۱)=۰\ \ (۰/۲۵)\Rightarrow ۲(-۱)^{۳}-k(-۱)^{۲}-(-۱)+۳=۰\ \ (۰/۲۵)\Rightarrow k=۲\ \ (۰/۲۵)$$

-۲ ارتفاع توپ قبل از nامین برخورد با زمین را A_n می‌نامیم. روشن است که:

$$A_۱=۵,\ A_۲=\frac{۵}{۳},\ A_۳=\frac{۵}{۹},\ \dots,\ A_n=\frac{۵}{۳^{n-۱}},\ \dots\ \ (۰/۲۵)$$

بنابراین مسافت طی‌شده توسط توپ بین هر دو برخورد متوالی توپ با زمین عبارت است از:

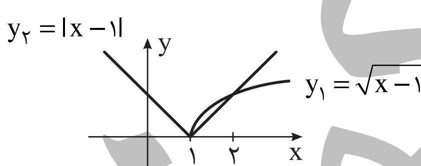
$$۱۰,\ \frac{۱۰}{۳},\ \frac{۱۰}{۹},\ \dots,\ \frac{۱۰}{۳^{n-۱}},\ \dots\ \ (۰/۲۵)\qquad a=۱۰$$

$$q=\frac{۱}{۳}\Rightarrow s_n=\frac{a}{۱-q}\ \ (۰/۲۵)\Rightarrow s_n=\frac{۱۰}{۱-\frac{۱}{۳}}\ \ (۰/۲۵)\Rightarrow S_n=۱۵\ \ (۰/۲۵)$$

-۳

$$-|a|\le a<|a|$$
$$-|b|\le b\le |b|\ \ (۰/۲۵)\Rightarrow -(|a|+|b|)\le a+b\le |a|+|b|\ \ (۰/۲۵)$$
$$\Rightarrow |a+b|\le |a|+|b|\ \ (۰/۲۵)$$

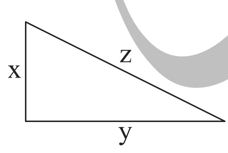
-۴ نمودار توابع $y_۱=\sqrt{x-۱}$ و $y_۲=|x-۱|$ را رسم می‌کنیم. مجموعه جواب، مجموعه نقاطی است که در آن نقاط نمودار $y_۱$ زیر نمودار $y_۲$ واقع شده باشد و یا دو نمودار نقطه‌ی مشترکی داشته باشند. (۰/۲۵)



رسم شکل (۰/۷۵)

با توجه به شکل رسم شده $\{۱\}\cup[۲\ ,\ +\infty)$=مجموعه جواب می‌باشد. (۰/۲۵)

-۵



$$\frac{۱}{۲}xy=۴\ \ (۰/۲۵)\Rightarrow y=\frac{A}{x}\ \ (۰/۲۵)\Rightarrow z^{۲}=x^{۲}+y^{۲}\ \ (۰/۲۵)$$
$$\Rightarrow z=\sqrt{x^{۲}+\frac{۶۴}{x^{۲}}}\ \ (۰/۲۵)$$

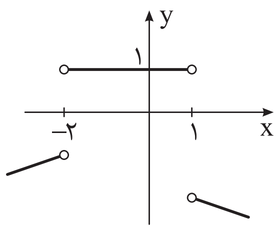
-۶

الف) $(۳f+۲g)_{(۴)}=۳f(۴)+۲g(۴)\ \ (۰/۲۵)\Rightarrow (۳f+۲g)_{(۴)}=۳۲\ \ (۰/۵)$

ب) $D_{fog}=\{x\in D_f\ |\ g(x)\in D_f\}\ \ (۰/۲۵)\ \ D_{fog}=\{x\neq ۳\ |\ \frac{۱}{x-۳}\in\mathbb{R}\}\ \ (۰/۵)$

$$D_{fog} = \mathbb{R} - \{۳\} \quad (۰/۲۵)$$

۷- رسم شکل (۰/۵)



تابع f در $(-\infty , -۲)$ صعودی اکید و در $(-۲ , ۱)$ ثابت و در $(۱ , +\infty)$ نزولی اکید است. (۰/۷۵)

۸-

$$\sqrt{۲}\sin(x+\frac{\pi}{۴}) = \underbrace{\sqrt{۲}(\sin x \ \cos\frac{\pi}{۴} + \cos x \ \sin\frac{\pi}{۴})}_{(۰/۵)} = \underbrace{\sqrt{۲}(\sin x \times \frac{۱}{\sqrt{۲}} + \cos x \times \frac{۱}{\sqrt{۲}})}_{(۰/۵)}$$

$$= \underbrace{\sin x + \cos x}_{(۰/۲۵)}$$

۹-

$$\sqrt{۷^۲} = ۱^۲ + ۳^۲ - ۲\times۱\times۳\times\cos\theta \quad (۰/۲۵) \Rightarrow \cos\theta = \frac{۱}{۲} \quad (۰/۲۵) \Rightarrow \theta = ۶۰ \quad (۰/۲۵)$$

۱۰-

$$\underbrace{\cos^{-۱}}_{(۰/۵)}(\cos(\frac{\pi}{۲} - \underbrace{\frac{\pi}{۸}}_{(۰/۲۵)})) = \cos^{-۱}(\cos(\underbrace{\frac{۳\pi}{۸}}_{(۰/۲۵)})) = \frac{۳\pi}{۸}$$

۱۱- برقراری شرط داشتن حد و تعریف شدن در همسایگی ۳ (۰/۵) برقراری شرط مساوی نبودن حد با مقدار تابع در نقطه‌ی ۳ (۰/۵)

۱۲-

الف) $$\lim_{x\to ۰} \frac{۱-\cos ۲x}{x^۲} = \underbrace{\lim_{x\to ۰} \frac{۲\sin^۲ x}{x^۲}}_{(۰/۲۵)} = \underbrace{\lim_{x\to ۰} ۲(\frac{\sin x}{x})^۲}_{(۰/۲۵)} = \underbrace{۲}_{(۰/۲۵)}$$

ب) $$\lim_{x\to ۲} \frac{x^۳ - ۸}{۳x^۲ - ۱۲} = \underbrace{\lim_{x\to ۲} \frac{(x-۲)(x^۲+۲x+۴)}{۳(x-۲)(x+۲)}}_{(۰/۲۵)} = \underbrace{\lim_{x\to ۲} \frac{x^۲+۲x+۴}{۳(x+۲)}}_{(۰/۲۵)} = \underbrace{۱}_{(۰/۲۵)}$$

۱۳-

$$\lim_{x\to ۴} \sqrt{x-۴} = \lim_{x\to ۴^+} \sqrt{x-۴} = ۰ \qquad f(۴) = ۰$$

پس تابع در $x=۴$ پیوسته است. (۰/۲۵) (۰/۲۵) (۰/۲۵) (۰/۲۵)

-۱۴

$$\left(\frac{۱}{f}\right)'(a)=\lim_{h\to ۰}\frac{\frac{۱}{f(a+h)}-\frac{۱}{f(a)}}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{\frac{f(a)-f(a+h)}{f(a+h)f(a)}}{h}$$

(۰/۵) (۰/۲۵)

$$=\lim_{h\to ۰}\frac{-(f(a+h)-f(a))}{h}\times\frac{۱}{f(a+h)f(a)}=\frac{-f'(a)}{f^{۲}(a)}$$

(۰/۵) (۰/۲۵)

-۱۵

الف) $f(x)=\dfrac{(۳x^{۲}-۱)^{۳}}{x+۱}$

$f'(x)=\dfrac{۳(۶x)(۳x^{۲}-۱)^{۲}(x+۱)-۱\times(۳x^{۲}-۱)^{۳}}{(x+۱)^{۲}}$ (۰/۷۵)

ب) $g(x)=\sqrt{۱-۲\cos ۳x}$

$g'(x)=\dfrac{۶\sin ۳x}{۲\sqrt{۱-۲\cos ۳x}}$ (۰/۷۵)

ج) $k(x)=۲\tan^{-۱}x+۳\sin^{-۱}x+\dfrac{۴}{x}$

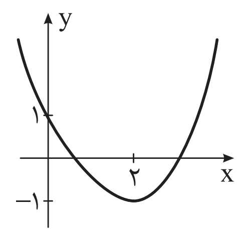
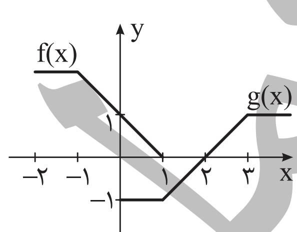
$k'(x)=\dfrac{۲}{۱+x^{۲}}+\dfrac{۳}{\sqrt{۱-x^{۲}}}-\dfrac{۴}{x^{۲}}$ (۰/۷۵)

-۱۶

$s=x^{۲}\ ,\ p=۴x$ (۰/۲۵) $\Rightarrow x=\dfrac{p}{۴}$ (۰/۲۵) $\Rightarrow s=\dfrac{p^{۲}}{۱۶}$ (۰/۲۵) $\Rightarrow s'_{(p)}=\dfrac{p}{۸}$ (۰/۲۵)

$\Rightarrow s'_{(۱۶)}=۲$ (۰/۲۵)

سوالات امتحان هماهنگ درس: حسابان	**رشته‌ی:** ریاضی و فیزیک	**ساعت شروع:** ۰۹:۰۰ صبح	مدت امتحان: **۱۵۰ دقیقه**
سال سوم آموزش متوسطه			تاریخ امتحان: **۷ / ٦ / ۱۳۹۰**
دانش‌آموزان و داوطلبان آزاد سراسر کشور در **شهریور ماه** سال **۱۳۹۰**			مرکز سنجش آموزش و پرورش

ردیف	سوالات	نمره
۱	در دنباله‌ی حسابی ... , ۱۴ , ۱۰ , ۶ , ۲ حداقل چند جمله را باید جمع کنیم تا حاصل از ۲۰۰ بیش‌تر شود.	۱
۲	حاصل عبارت $(۱-\frac{۲}{x})^{۵}$ را به دست آورید.	۰/۷۵
۳	در شکل روبه‌رو نمودار سهمی به معادله‌ی $p(x) = ax^{۲} + bx + c$ داده شده است. ضرایب a ، b و c را تعیین کنید. 	۱/۲۵
۴	نامعادله‌ی $\frac{۱}{x} \leq \sqrt{x}$ را با روش هندسی حل کنید و مجموعه جواب را به دست آورید.	۱
۵	تابع $y = \|۱-x\| - ۳$ را به صورت یک تابع چند ضابطه‌ای بنویسید و نمودار آن را رسم کنید. به کمک نمودار برد آن را معلوم کنید.	۱/۲۵
۶	زوج یا فرد بودن تابع $y = \frac{x^{۳} - ۳x}{x^{۲} - ۱}$ را معلوم کنید.	۱
۷	با استفاده از نمودار توابع g و f در شکل روبه‌رو عبارات داده‌شده را محاسبه کنید. الف) $(f+g)(۱)$ ب) $(fog)(۲)$ 	۰/۷۵
۸	اگر $f(x) = ۴x - ۳$ و $g(x) = x + ۲$ ، تابع $(gof)^{-۱}$ را حساب کنید.	۱
۹	اگر α و β زاویه‌هایی در ربع سوم باشند و $\sin\alpha = -\frac{۴}{۵}$ و $\cos\beta = -\frac{۵}{۱۳}$ ، مقدار $\sin(\alpha+\beta)$ را محاسبه کنید.	۱/۲۵
۱۰	معادله‌ی $\tan x \tan ۲x = ۱$ را حل کنید.	۱/۲۵
۱۱	مقدار $\cos(\tan^{-۱}(-\sqrt{۳}))$ را حساب کنید.	۰/۵

سوالات امتحان هماهنگ درس: حسابان	**رشته‌ی:** ریاضی و فیزیک	**ساعت شروع:** ۰۹:۰۰ صبح	مدت امتحان: **۱۵۰ دقیقه**
سال سوم آموزش متوسطه			تاریخ امتحان: **۱۳۹۰ / ۶ / ۷**
دانش‌آموزان و داوطلبان آزاد سراسر کشور در **شهریور ماه** سال **۱۳۹۰**			**اداره‌ی کل سنجش و ارزشیابی تحصیلی**

ردیف	سوالات امتحان نهایی مرتبط با کتاب جدید درسی	نمره
۱۲	نمودار تابعی را رسم کنید که تابع در۲ تعریف نشده باشد ولی در یک همسایگی محذوف۲ تعریف شده باشد و در این نقطه حد داشته باشد.	۰/۷۵
۱۳	حد توابع زیر را محاسبه کنید. الف) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-2x-1}{x^2-1}$ ب) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{\sqrt{2x-2}}$ ج) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt{1-\cos 2x}}{\sin\frac{x}{2}}$	۲/۵
۱۴	آیا تابع $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$ در ۲ پیوسته است؟ چرا؟	۰/۷۵
۱۵	با استفاده از تعریف مشتق، مشتق تابع $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$ را در $x=2$ حساب کنید.	۱
۱۶	مشتق توابع زیر را حساب کنید. (ساده کردن الزامی نیست.) الف) $f(x)=\sin(\sqrt{2x+5})$ ب) $g(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{(2x+1)^3}$ ج) $k(x)=(1+\tan x)\cos^{-1}x$	۳
۱۷	نقاطی از نمودار تابع $y=x^3-2x-1$ را تعیین کنید که خط مماس بر منحنی در این نقاط موازی نیمساز ربع اول و سوم باشد.	۱
	جمع نمرات	۲۰

✓ پاسخ سوالات امتحان هماهنگ

-۱

$$S=\frac{n[۲a+(n-۱)d]}{۲}\ \ (۰/۲۵)\Rightarrow\frac{n[۴+(n-۱)۴]}{۲}>۲۰۰\ \ (۰/۲۵)$$

$۴n^۲>۴۰۰\ \ (۰/۲۵)\Rightarrow n>۱۰\ \ (۰/۲۵)$ حداقل ۱۱ جمله باید جمع کنیم. (۰/۲۵)

-۲ هر دو جمله (۰/۲۵)

$$(۱-\frac{۲}{x})^۵=۱-۵(\frac{۲}{x})+۱۰(\frac{۲}{x})^۲-۱۰(\frac{۲}{x})^۳+۵(\frac{۲}{x})^۴-(\frac{۲}{x})^۵$$

-۳

$$(۰\,,۱)\Rightarrow P(۰)=۰+۰+c=۱\Rightarrow c=۱\ \ (۰/۲۵)$$

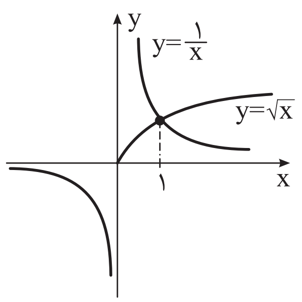
$$(۲\,,-۱)\Rightarrow P(۲)=۴a+۲b+۱=-۱\Rightarrow ۴a+۲b=-۲\ \ (۰/۲۵)$$

$$x=\frac{-b}{۲a}\Rightarrow\frac{-b}{۲a}=۲\Rightarrow -b-۴a=۰\ \ (۰/۲۵)\Rightarrow\begin{cases}۴a+۲b=-۲\\ -b-۴a=۰\end{cases}\Rightarrow b=-۲\ \ (۰/۲۵)\ \text{و}\ \ a=\frac{۱}{۲}\ \ (۰/۲۵)$$

-۴ رسم نمودار $y=\frac{۱}{x}$ (۰/۵)

رسم نمودار $y=\sqrt{x}$ (۰/۲۵)

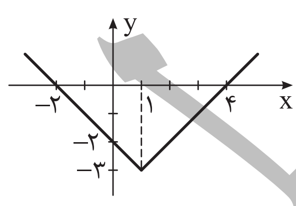
مجموعه جواب $=[۱\,,+\infty)$ (۰/۲۵)



-۵

$$y=\begin{cases}x-۴ & x\ge ۱\\ -x-۲ & x<۱\end{cases}\ \ (۰/۵)$$

برد تابع : $[-۳\,,+\infty)$ (۰/۲۵)



رسم شکل (۰/۵)

-۶

$$f(-x)=\frac{(-x)^۳-۳(-x)}{(-x)^۲-۱}\ \ (۰/۲۵)\Rightarrow f(-x)=\frac{-x^۳+۳x}{x^۲-۱}$$

$$f(-x)=\frac{-(x^۳-۳x)}{x^۲-۱}\ \ (۰/۲۵)=-f(x)\ \ (۰/۲۵)$$ تابع فرد است. (۰/۲۵)

-۷

الف) $(f+g)(۱)=f(۱)+g(۱)=۰+(-۱)=-۱\ \ (۰/۲۵)$

ب) $(fog)(۲)=f(g(۲))=f(۰)=۱\ \ (۰/۲۵)$

(۰/۲۵)

-۸

$$y=(gof)(x)=g(f(x))=۴x-۳+۲=۴x-۱ \quad (۰/۲۵)$$

$$x=\frac{y+۱}{۴} \Rightarrow y=\frac{x+۱}{۴} \Rightarrow (gof)^{-۱}(x)=\frac{x+۱}{۴} \quad (۰/۵)$$

$(۰/۲۵)$

-۹

$$\sin\alpha=\frac{-۴}{۵} \Rightarrow \cos\alpha=-\sqrt{۱-\sin^۲\alpha}=-\sqrt{۱-\frac{۱۶}{۲۵}}=-\frac{۳}{۵} \quad (۰/۲۵)$$

$$\cos\beta=\frac{-۵}{۱۳} \Rightarrow \sin\beta=-\sqrt{۱-\cos^۲\beta}=-\sqrt{۱-\frac{۲۵}{۱۶۹}}=-\frac{۱۲}{۱۳} \quad (۰/۲۵)$$

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha=(\frac{-۴}{۵})(\frac{-۵}{۱۳})+(\frac{-۳}{۵})(\frac{-۱۲}{۱۳})=\frac{۵۶}{۶۵} \quad (۰/۲۵)$$

$(۰/۲۵)$

-۱۰

$$\tan x\ \tan ۲x=۱ \Rightarrow \tan ۲x=\frac{۱}{\tan x}=\cot x \Rightarrow \tan ۲x=\tan(\frac{\pi}{۲}-x) \quad (۰/۲۵)$$

$(۰/۲۵)\ (۰/۲۵)$

$$۲x=k\pi+\frac{\pi}{۲}-x \Rightarrow ۳x=k\pi+\frac{\pi}{۲} \Rightarrow x=\frac{k\pi}{۳}+\frac{\pi}{۶} \quad (۰/۲۵)$$

$(۰/۲۵)$

-۱۱

$$\cos\left(\tan^{-۱}\left(-\sqrt{۳}\right)\right)=\cos\left(-\frac{\pi}{۳}\right)=\frac{۱}{۲} \quad (۰/۲۵)$$

$(۰/۲۵)$

-۱۲ رسم نمودار با هر یک از شرط‌های خواسته شده. (۰/۷۵)

-۱۳

الف)

$$\lim_{x\to-۱}\frac{x^۳-۲x-۱}{x^۲-۱}=\lim_{x\to-۱}\frac{(x^۲-x-۱)(x+۱)}{(x-۱)(x+۱)}=\lim_{x\to-۱}\frac{x^۲-x-۱}{x-۱}=\frac{۱}{-۲} \quad (۰/۲۵)$$

$(۰/۲۵)$ $(۰/۲۵)$

ب)

$$\lim_{x\to۲}\frac{x-۲}{\sqrt{۲x}-۲}\times\frac{\sqrt{۲x}+۲}{\sqrt{۲x}+۲}=\lim_{x\to۲}\frac{(x-۲)(\sqrt{۲x}+۲)}{۲x-۴}=$$

$(۰/۲۵)$ $(۰/۲۵)$

$$\lim_{x\to۲}\frac{(x-۲)(\sqrt{۲x}+۲)}{۲(x-۲)}=\lim_{x\to۲}\frac{\sqrt{۲x}+۲}{۲}=۲$$

$(۰/۲۵)$ $(۰/۲۵)$

ج) $$\lim_{x\to ۰^+}\frac{\sqrt{۱-\cos ۲x}}{\sin\frac{x}{۲}}=\lim_{x\to ۰^+}\overset{(۰/۲۵)}{\frac{|\sqrt{۲}\sin x|}{\sin\frac{x}{۲}}}=\lim_{x\to ۰^+}\overset{(۰/۲۵)}{\frac{\sqrt{۲}\sin x}{\sin\frac{x}{۲}}}=\frac{\sqrt{۲}}{\frac{۱}{۲}}=۲\sqrt{۲}\quad (۰/۲۵)$$

۱۴- خیر (۰/۲۵) . زیرا تابع در ۲ تعریف نشده است. (۰/۵)

۱۵-

$$f'(۲)=\lim_{x\to ۲}\underset{(۰/۲۵)}{\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}}=\lim_{x\to ۲}\underset{(۰/۲۵)}{\frac{\frac{۱}{x+۱}-\frac{۱}{۳}}{x-۲}}=f'(۲)=\lim_{x\to ۲}\overset{(۰/۲۵)}{\frac{\frac{۳-(x+۱)}{۳(x+۱)}}{x-۲}}$$

$$\lim_{x\to ۲}\frac{\frac{-x+۲}{۳(x+۱)}}{x-۲}=\lim_{x\to ۲}\frac{-۱}{۳(x+۱)}=\frac{-۱}{۹}\quad (۰/۲۵)$$

۱۶-

الف) $$f(x)=\sin(\sqrt{۲x+۵})\Rightarrow f'(x)=\underset{(۰/۵)}{\frac{۲}{۲\sqrt{۲x+۵}}}\underset{(۰/۲۵)}{\cos\sqrt{۲x+۵}}$$

ب) $$g(x)=\frac{\sqrt{x}}{(۲x+۱)^{۳}}\Rightarrow g'(x)=\underset{(۰/۲۵)}{\frac{\overset{(۰/۵)}{\frac{۱}{۲\sqrt{x}}(۲x+۱)^{۳}}-\overset{(۰/۵)}{۳(۲)(۲x+۱)^{۲}\sqrt{x}}}{(۲x+۱)^{۶}}}$$

ج) $$k(x)=(۱+\tan x)\cos^{-۱}\Rightarrow k'(x)=\underset{(۰/۵)}{(۱+\tan^{۲}x)\cos^{-۱}x}+\underset{(۰/۵)}{\frac{-۱}{\sqrt{۱-x^{۲}}}(۱+\tan x)}$$

۱۷-

$$\left.\begin{array}{ll} y'=۳x^{۲}-۲ & (۰/۲۵)\\ y=x\Rightarrow m=۱ & (۰/۲۵)\end{array}\right\}\Rightarrow ۳x^{۲}-۲=۱$$

$$x^{۲}=۱\ \Rightarrow\ x=۱\ \Rightarrow\ y=-۲\quad (۰/۲۵)$$

$$\Rightarrow\ x=-۱\ \Rightarrow\ y=۰\quad (۰/۲۵)$$

همکاران کتاب‌های مکمل

این لیست حاوی استادانی است که در تدریس خود از کتاب‌های مکمل استفاده نموده‌اند.
قصد داریم تا هر سال نام استادانی که ازکتاب‌های مکمل استفاده می‌نمایند درکتاب‌هایمان قید نماییم.
لطفاً در صورت استفاده از این کتاب‌ها، به ما اطلاع دهید.

نام دبیرستان	منطقه یا شهر	نام استادان
دبیرستان پسرانه **ایران**	۱ تهران	آقای **انواری**
دبیرستان دخترانه **طلوع امید**	۱ تهران	خانم **جاریانی**
دبیرستان دخترانه **خاورمنش**	۱ تهران	خانم **ابراهیمی**
دبیرستان دخترانه **فرشته**	۱ تهران	خانم **جاریانی**
هنرستان دخترانه **آزادگان**	۱ تهران	خانم **گل‌خواه** و همکاری خانم **کوکبی**
دبیرستان دخترانه **زهره هادی‌خان تهرانی**	۱ تهران	خانم‌ها: **ابراهیمی** و **ارباب‌زاده**
دبیرستان دخترانه **فراست**	۱ تهران	خانم **فیض‌آبادی**
دبیرستان دخترانه **تقوی‌نیا**	۱ تهران	خانم **ابیضی**
دبیرستان دخترانه **بوعلی**	۱ تهران	خانم **غیبی**
دبیرستان دخترانه **مشکاة**	۲ تهران	
دبیرستان پسرانه **پیام معلم**	۲ تهران	آقای **شریفی**
دبیرستان دخترانه **رهنما**	۲ تهران	خانم **علیپور**
دبیرستان پسرانه **تدبیر شمس**	۳ تهران	آقای **یوسف‌زاده**
دبیرستان دخترانه **ایران**	۳ تهران	خانم **هراتی**
دبیرستان دخترانه **آیین روشن**	۳ تهران	خانم‌ها: **نظری** و **جعفریان**
دبیرستان دخترانه **خواجه عبدا...**	۴ تهران	خانم **عباسی**
دبیرستان پسرانه **آذین علم**	۴ تهران	آقای **باصری**
دبیرستان دخترانه **شرافت**	۴ تهران	خانم **پهلوان مقدم**
دبیرستان دخترانه **حقیقت**	۴ تهران	خانم **عارف**
دبیرستان دخترانه **آبسال**	۴ تهران	خانم **عرض‌پیما**
دبیرستان دخترانه **چهارده معصوم** (ع)	۴ تهران	خانم **پورایمان**
دبیرستان دخترانه **امام محمد باقر** (ع)	۴ تهران	خانم **رمضانی**
دبیرستان پسرانه **توحید**	۴ تهران	آقای **جلیلی**
دبیرستان دخترانه **نوری**	۵ تهران	خانم **شاطریان**
دبیرستان دخترانه **حکمت**	۵ تهران	خانم **سواحلی**
دبیرستان دخترانه **عترت**	۵ تهران	خانم **برهانی**
دبیرستان دخترانه **رهروان معرفت**	۵ تهران	خانم **محرابی**
دبیرستان پسرانه **نورالمهدی**	۵ تهران	آقای **کریمیان**
دبیرستان پسرانه **هوشیار**	۵ تهران	آقای **خرمی**
دبیرستان دخترانه **بوعلی**	۶ تهران	خانم **غیبی** و **ابدالی**
دبیرستان دخترانه **حضرت زهرا** (س)	۶ تهران	خانم **ابدالی**
دبیرستان دخترانه **ندای آزادی**	۷ تهران	خانم **جعفرزاده**
دبیرستان دخترانه **خدیجه کبری** (س)	۷ تهران	خانم **ربیعی**
دبیرستان پسرانه **علامه امینی** (ره)	۷ تهران	آقای **گل‌محمدی**
دبیرستان پسرانه **سوقومونیان**	۸ تهران	آقای **باصری**

دبیرستان دخترانه **الهام**	۸ تهران	خانم **عمادی**
دبیرستان دخترانه **نوین**	۸ تهران	خانم **رویان**
دبیرستان پسرانه **کمیل**	۸ تهران	آقای **احمدی**
دبیرستان دخترانه **تزکیه**	۸ تهران	خانم **شرافتی**
دبیرستان پسرانه **پیشرو**	۸ تهران	آقای **عیسی‌پور**
دبیرستان دخترانه **رضوان**	۸ تهران	خانم **ناظمی**
دبیرستان پسرانه **خوارزمی**	۸ تهران	آقای **عرب عامری**
دبیرستان پسرانه **دانشمند**	۸ تهران	آقایان: **امیدی، سلطانی** و **نصرت‌جو**
دبیرستان پسرانه **شهید حسینی**	۸ تهران	آقای **کوچک‌پور**
دبیرستان دخترانه **فاطمیه**	۸ تهران	خانم **سلیمی**
دبیرستان دخترانه **آیت**	۸ تهران	خانم **شیرزاد**
دبیرستان دخترانه **خوارزمی**	۸ تهران	آقای **خرمی**
دبیرستان پسرانه **دکتر حسابی**	۸ تهران	آقای **علوی**
دبیرستان دخترانه **حجاب**	۹ تهران	خانم **علیزاده**
دبیرستان پسرانه **توحید**	۹ تهران	آقای **خلیلی**
دبیرستان دخترانه **علویان**	۱۱ تهران	خانم **عبودی**
دبیرستان دخترانه **علویان**	۱۲ تهران	خانم **شریفی**
دبیرستان پسرانه **میلاد طاها**	۱۲ تهران	آقای **منتظران**
دبیرستان دخترانه **معرج**	۱۳ تهران	خانم **جعفری**
دبیرستان پسرانه **امام رضا** (ع)	۱۳ تهران	آقای **براری**
دبیرستان دخترانه **ندای فاطمه** (س)	۱۳ تهران	خانم **جعفری**
دبیرستان دخترانه **ولیعصر**	۱۴ تهران	خانم **همتی**
دبیرستان دخترانه **رسول اکرم** (ص)	۱۵ تهران	خانم **جعفرزاده**
دبیرستان پسرانه **باقرالعلوم**	۱۵ تهران	خانم **مژگانی**
دبیرستان دخترانه **الزهراء**	۱۶ تهران	خانم **فرهادی**
دبیرستان پسرانه **الهی**	۱۶ تهران	آقای **شریفی**
دبیرستان دخترانه **برهان**	۱۷ تهران	خانم **یاوری**
دبیرستان دخترانه **ارشاد**	۱۹ تهران	خانم **سرابی**
دبیرستان پسرانه **حکمت**	شهر ری تهران	آقای **یوسف‌زاده**
دبیرستان پسرانه شاهد **شهید مطهره**	آذربایجان‌غربی	آقای **یوسفی**
دبیرستان پسرانه **صائب**	اصفهان	آقای **نظری**
دبیرستان پسرانه **امام محمد باقر** (ع)	اصفهان	آقای **نصر**
دبیرستان پسرانه **جامع**	اصفهان	آقای **طائبی**
دبیرستان دخترانه **باهنر**	اصفهان	خانم **شیخیان**
دبیرستان دخترانه **۲۲ بهمن**	اصفهان	خانم **رستمیان**
دبیرستان دخترانه **بنت‌الهدی**	اصفهان	خانم **فصیحی**
دبیرستان پسرانه **کمال**	فولادشهر اصفهان	آقای **قدیری**
دبیرستان دخترانه **شرافت**	البرز	خانم **حیدری**
هنرستان دخترانه **انقلاب**	البرز	خانم **پارسی**
دبیرستان پسرانه **امیرکبیر**	البرز	آقای **ارجمند**
دبیرستان پسرانه **امام جعفر صادق** (ع)	البرز	آقای **علیپور**
دبیرستان دخترانه **سمیه**	البرز	خانم **عزیزخانی**

دبیرستان پسرانه **ستار لطفی**	البرز	آقای **سلطانی**
دبیرستان دخترانه **سارا**	البرز	آقای **سهرابی**
دبیرستان پسرانه **ارشاد**	البرز	آقای **علیپور**
دبیرستان دخترانه **دکتر حسابی**	البرز	خانم **یاوری**
هنرستان پسرانه **امیرکبیر**	اهر	آقایان: **حسینی** و **صالحی**
دبیرستان پسرانه **رهنمون**	اهر	آقای **قلی‌زاده**
آموزشگاه پسرانه **اندیشه**	اهواز	آقای **خلیلی**
دبیرستان پسرانه **شهید شیخانی**	اهواز	آقای **عامری**
دبیرستان پسرانه **اندیشه**	اهواز	آقای **خلیلی**
دبیرستان پسرانه **طالقانی**	تبریز	آقای **زمانی**
دبیرستان پسرانه **سروش**	تبریز	آقای **صباغی**
دبیرستان پسرانه **صادقیه**	تبریز	آقای **منتظری**
دبیرستان دخترانه **سردار ملی**	تبریز	خانم **ولی‌زاده**
هنرستان دخترانه **ریحان**	تبریز	خانم **اصلانی**
دبیرستان دخترانه **پروین اعتصامی**	تبریز	خانم **شکری**
دبیرستان پسرانه **ثامن ائمه**	تبریز	آقایان: **عسگری** و **آوخ**
دبیرستان پسرانه **شهید قاضی**	تبریز	آقایان: **احمدپور** و **شریفی**
دبیرستان پسرانه **دهخدا**	تبریز	آقای **سپهری**
دبیرستان پسرانه **امیر خیزی**	تبریز	آقای **بختی**
دبیرستان دخترانه **رهنمون**	تبریز	خانم **قلی‌زاده**
دبیرستان دخترانه **فاطمیه**	تبریز	خانم‌ها: **عباسی، اتحادنژاد** و **مهدوی**
دبیرستان دخترانه **مردانی آذر**	تبریز	خانم **بخشی**
دبیرستان دخترانه **انقلاب اسلامی**	تبریز	خانم **صادقیان**
دبیرستان پسرانه **شهید رضایی**	تبریز	آقای **رستمی**
دبیرستان دخترانه **شاهد**	خراسان جنوبی	خانم **سلیمان‌پور**
دبیرستان دخترانه **فدک**	خراسان جنوبی	خانم **امجدی**
دبیرستان دخترانه **پژوهش**	خراسان رضوی	خانم **نادری**
دبیرستان دخترانه **فرزانگان**	سیرجان	خانم **کوشش**
دبیرستان دخترانه **برهان‌الدین**	شبستر	خانم **گوهری**
دبیرستان دخترانه **ایثار**	شهر قدس	خانم **حسن‌لو**
دبیرستان پسرانه **امام علی** (ع)	شهر قدس	آقای **رفیعی**
دبیرستان پسرانه **شهید رضایی**	شیراز	آقای **شاهین**
دبیرستان دخترانه **بنت‌الهدی صدر**	شیراز	خانم **پاردسویی**
دبیرستان دخترانه **حجاب**	شیراز	خانم **علامه‌زاده**
دبیرستان دختران **ستارگان**	شیراز	خانم **حسینی**
دبیرستان دخترانه **علوم پزشکی**	شیراز	خانم **نوبهار**
دبیرستان پسرانه **ملاصدرا**	شیراز	آقای **خادمی**
دبیرستان دخترانه **برادران توکلی**	شیراز	خانم **عمرانیان**
دبیرستان پسرانه **سید قطب**	کردستان	آقای **جمال تیره**
دبیرستان پسرانه **شهدای اسلام**	مهاباد	آقای **یوسفی**
دبیرستان پسرانه **دانشگاه**	هرمزگان	آقای **درآیش**
مجتمع **حضرت زینب** (ع)	**سوریه - دمشق**	خانم **موفق‌آزاد**